Kalenderrechnung

osurs@bluewin.ch Urs Oswald www.ursoswald.ch

20. August 2008

Inhaltsverzeichnis

Dieser Artikel stützt sich hauptsächlich auf Bachmann[1] . Die astronomischen Monddaten der Jahre 1700 bis 2035 sind unter USNOmp[2] publiziert. Eine Fülle von Osterdaten findet man auf USNOea[3] .

Heinz Bachmann, der zur Ausarbeitung dieses Artikels mit vielen klärenden Gesprächen beigetragen hat, danke ich herzlich.

Mit Hilfe der präsentierten Sätze und Formeln lassen sich Kalender- und Osterdaten von Hand ermitteln, und für den Einsatz von Rechnern bietet sich eine beinahe unerschöpfliche Fülle von Fragestellungen.

1 Mathematische Voraussetzungen

Wir bezeichnen mit k, m und n *natürliche* Zahlen, während x für eine beliebige *reelle* Zahl steht. Da nicht alle Computerprogramme den Befehl `int` (ganzer Teil) in der klassischen Weise interpretieren (jedenfalls nicht für negative Zahlen), sei festgehalten, dass wir unter $\operatorname{int} x$ die grösste ganze Zahl k verstehen mit $k \leq x$.

Die Berechnungen dieses Artikels stützen sich auf die Formeln

$$[x \pm n] = [x] \pm n, \tag{1}$$

$$n = k \operatorname{int} \frac{n}{k} + n \bmod k, \tag{2}$$

$$\operatorname{int} \frac{n}{km} = \operatorname{int} \frac{\operatorname{int} \frac{n}{k}}{m}, \tag{3}$$

$$x \bmod n + (n - 1 - x) \bmod n = n - 1. \tag{4}$$

Beweis:

(1): $m = [x]$ ist gleichbedeutend mit $m \leq x < m + 1$. Dies wiederum ist äquivalent mit $m \pm n \leq x \pm n < (m \pm n) + 1$, also mit $[x \pm n] = m \pm n = [x] \pm n$.

(2): $n \bmod k$ kann als $n - k \operatorname{int} \frac{n}{k}$ definiert werden.

(3): Wir setzen $x = \operatorname{int} \frac{m}{n}$ und $y = \operatorname{int} \frac{x}{k}$. Dann gilt: $m = xn + r$, $0 \leq r \leq n - 1$, und $x = yk + s$, $0 \leq s \leq k - 1$. Durch Einsetzen ergibt sich $m = (yk + s)n + r = y \cdot kn + (sn + r)$, wobei $sn + r \leq (k - 1)n + n - 1 = kn - 1$.

(4): Unter der Voraussetzung $0 \leq x < n$ ist die Behauptung selbstverständlich, da dann auch $0 \leq n - 1 - x < n$, weswegen sich die linke Seite auf $x + (n - 1 - x)$ reduziert. Diese Voraussetzung bedeutet jedoch keine Einschränkung der Allgemeinheit, da sich die linke Seite nicht ändert, wenn man x um ein Vielfaches von n ändert. *q.e.d.*

2 Tageszähler und Kalender

2.1 Tageszähler

An sich genügt irgendein *Tageszähler*, um sämtliche Ereignisse der Geschichte wie an einer Perlenkette aufzureihen. Man erhält einen solchen, indem man irgendeinem Tag die Nummer 0 (oder 1) zuteilt. Darauf kann man durch Vor- und Rückwärtszählen jedem Tag eindeutig eine ganze Zahl zuordnen. Indem man festlegt, dass der Wert des Tageszählers den *Anbruch* des betreffenden Tages bezeichnen soll, erweitert man den Tageszähler zu einem kontinuierlichen Zeitmesser.

Ein solcher erweiterter Tageszähler ist das *Julianische Datum* (JD), nicht zu verwechseln mit dem Julianischen *Kalender*, mit dem es gar nichts zu tun hat. Es wurde 1583 vom französischen Philologen und Geschichtsschreiber JOSEPH JUSTUS SCALIGER vorgeschlagen. Der Nullpunkt ist auf den 1. Januar des Jahres −4712 festgesetzt, und zwar auf 12 Uhr mittags (fügen wir zur Präzisierung bei: nach TDT, der Terrestrischen Dynamischen Zeit). Die Datumsangabe bezieht sich auf den rückwärts in die Vergangenheit verlängerten Julianischen Kalender. Die Jahresangabe −4712 ist astronomisch zu verstehen. Vor dem Jahr 1 liegt unmittelbar das astronomische Jahr 0, welches die Historiker das Jahr 1 v. Chr. nennen. Der Ursprung des Julianischen Datums fällt somit auf den Beginn des Jahres 4713 v. Chr. Für die Astronomen, wenigstens die europäischen, liegt der Vorteil des Julianischen Datums darin, dass während der Nacht kein Datumswechsel stattfindet.

Ebenfalls gebräuchlich ist das sogenannte *Modifizierte Julianische Datum* (MJD). Das MJD wurde im geophysikalischen Jahr 1957/58 eingeführt und wird hauptsächlich in Geodäsie, Geophysik und Raumfahrt verwendet, konnte sich jedoch in der Astronomie nicht durchsetzen. Man erhält seinen Wert aus dem JD durch Subtraktion von 2 400 000.5. Die Nummer 0 erhält (seltsamerweise und vermutlich ganz und gar zufällig) der Todestag des britischen Unternehmers und Sozialreformers ROBERT OWEN (geboren am Tag mit dem MJD −31 963).

Da nun der Begriff ≪Julianisches Datum≫ schon vergeben ist, spricht man von Kalenderdaten *alten Stils* oder *neuen Stils*, je nachdem sie sich auf den Julianischen oder den Gregorianischen Kalender beziehen.

Arbeiten werden wir in diesem Artikel aber weder mit dem Julianischen, noch mit dem Modifizierten Julianischen Datum, sondern mit der *Tagesnummer*. Man versteht darunter die Zahl, die einem gegebenen Tag zukommt, wenn man die Tage fortlaufend nummeriert, wobei dem 1. März des Jahres 0 alten Stils die Zahl 1 zugeordnet wird. (Für die Historiker ist das Jahr 0 das Jahr 1 v. Chr.) Der Julianische Kalender wird hier nur als Krücke zur Verankerung der Zählung benützt. Ebensogut könnte man festsetzen, dass dem Beginn des berühmten Woodstock-Festes die Tagesnummer 719 332 zuzuordnen ist.

2.2 Kalender

Im Gegensatz zu einem Tageszähler versucht ein *Kalender*, den Jahreszeiten Rechnung zu tragen. Das Ziel wäre dann erreicht, wenn z.B. die Sommersonnenwende Jahr für Jahr auf dasselbe Datum fiele. Für die nördliche Erdhalbkugel ist der Zeitpunkt der Sommersonnenwende dadurch definiert, dass der Winkel zwischen dem Zentrum der Sonne, dem Zentrum der Erde und dem Nordpol *minimal* ist. Er beträgt dann $\alpha_{\min} = 90° - \varepsilon$, mit der *Ekliptikschiefe* $\varepsilon \approx 23.44°$ (Wert 2005).

Unter einem *tropischen Jahr* (≪Sonnenjahr≫) J_t versteht man die Zeit, welche zwischen zwei aufeinanderfolgenden Sommersonnenwenden (oder aufeinanderfolgenden Frühlingsäquinoktion usw.) verstreicht. (Das Wort ≪tropisch≫ kommt vom griechischen ≪trepein≫ = wenden.) Ein *Sonnentag* ($1\,\mathrm{d} = 86\,400\,\mathrm{s}$) ist die Zeit, die zwischen einem Höchststand der Sonne und dem nächsten liegt. Leider passen tropisches Jahr und Sonnentag schlecht zueinander:

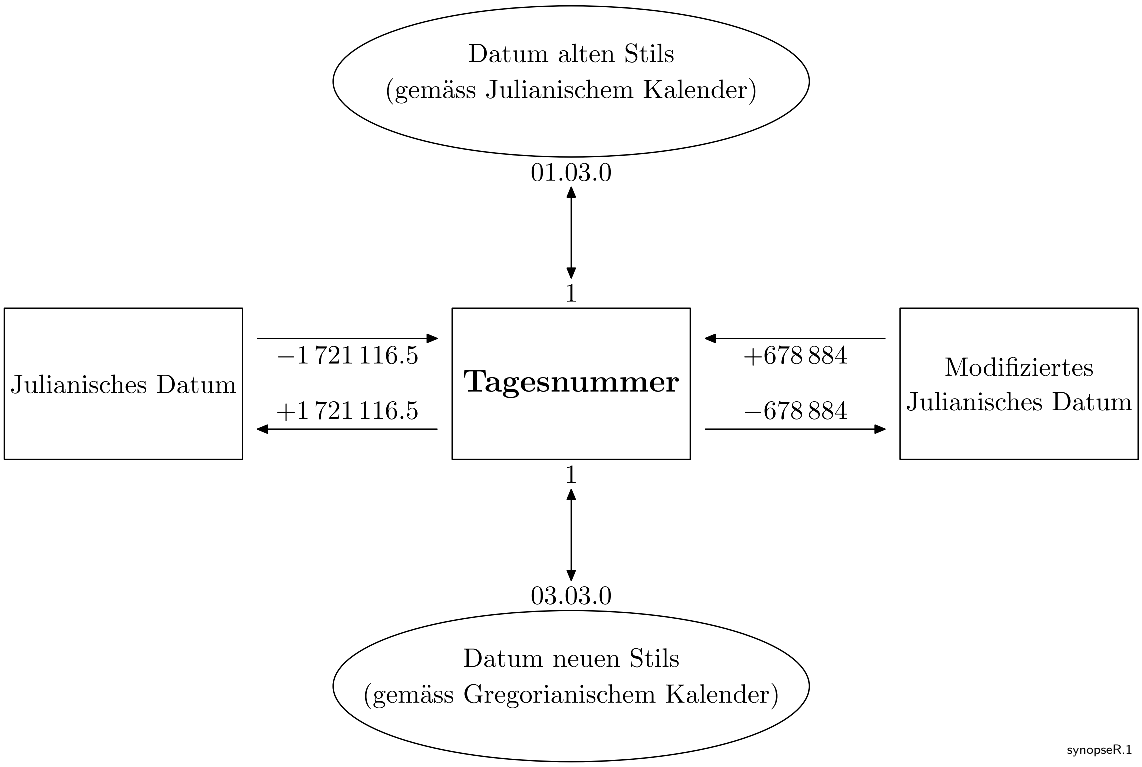
$$1 \text{ tropisches Jahr } \approx 365.242194\,\mathrm{d}. \tag{5}$$

Das hat zur Folge, dass jeder Kalender entweder ungenau oder impraktikabel ist.

Für die Kalenderrechnung ohne Bedeutung ist das *siderische Jahr* (≪Sternjahr≫). In einem solchen beschreibt die Erde einen vollen Umlauf um die Sonne, wobei ≪die Sterne≫ den Bezugsrahmen abgeben. Behielte die Erdachse ihre Richtung exakt bei, so wären siderisches und tropisches Jahr identisch: Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Sommersonnenwenden läge genau ein siderisches Jahr. Infolge der Kreiselbewegung der Erde (≪Präzession≫) hat aber nach einem vollen Umlauf der kritische Winkel zwischen dem Zentrum der Sonne, dem Zentrum der Erde und dem Nordpol sein Minimum schon hinter sich gelassen, weswegen das tropische Jahr etwas kürzer ist als das siderische. Da die Erdachse für die Rotation um die

Normale der Erdumlaufbahn ungefähr 26 000 Jahre braucht, liegt der Unterschied in der Grössenordnung von $\frac{1}{26000}$ Jahr, d.h. von etwa 20 Minuten.

2.3 Übersicht der gebräuchlichsten Tageszähler und Kalender



In diesem Schema ist vorweggenommen, dass der Tag mit der Tagesnummer 1 im Gregorianischen Kalender auf den 3. März des Jahres 0 fällt. Mit andern Worten tritt der 3. März im Gregorianischen Kalender 2 Tage apäter als im Julianischen ein. (Auch hier denkt man sich den Gregorianischen Kalender rückwärts in die Vergangenheit verlängert.) Einige Beispiele:

Ereignis	Tagesnr.		MJD	alter Stil	neuer Stil
Schlacht bei Cannae	-78374	Fr	-757258	`02.08.-215`	`29.07.-215`
Tod von Gaius Julius Caesar	-15691	Mi	-694575	`15.03. -43`	`13.03. -43`
Gründung der Eidgenossenschaft	471691	Mi	-207193	`01.08.1291`	`08.08.1291`
Schlacht bei Sempach	506367	Mo	-172517	`09.07.1386`	`17.07.1386`
Gregorianischer Kalender	578044	Fr	-100840	`05.10.1582`	`15.10.1582`
Schlacht bei Waterloo	663026	So	-15858	`06.06.1815`	`18.06.1815`
Tag 0 im MJD (Robert Owen †)	678884	Mi	0	`05.11.1858`	`17.11.1858`
Eröffnung des Gotthardtunnels	687473	Mi	8589	`12.05.1882`	`24.05.1882`
Überfall auf Pearl Harbor	709219	So	30335	`24.11.1941`	`07.12.1941`
Zerstörung der Twin Towers	731047	Di	52163	`29.08.2001`	`11.09.2001`

Die ersten beiden Daten im alten Stil bedeuten dabei:

- ≪`02.08.-215`≫ ist der 2. August 216 v. Chr.
- ≪`15.03.-43`≫ ist der 15. März 44 v. Chr.

3 Julianischer und Gregorianischer Kalender

3.1 Schalt- und Gemeinjahre, Mischjahre

Definition 1 *Ein Jahr wird*

- Julianisches Schaltjahr *genannt, wenn seine Jahreszahl durch 4 teilbar ist,*
- Gregorianisches Schaltjahr*, wenn seine Jahreszahl durch 4 und, wenn sie durch 100 teilbar ist, auch durch 400 teilbar ist.*

Die übrigen Jahre werden Gemeinjahre *genannt.*

Unter einem Mischjahr *verstehen wir ein Jahr, welches ein* Julianisches*, aber kein* Gregorianisches *Schaltjahr ist.*

Mischjahre haben die Eigenschaft, dass ihre Jahreszahlen durch 100, aber nicht durch 400 teilbar sind. Das letzte Mischjahr war 1900, das nächste wird 2100 sein.

3.2 Bauernjahr und Verwaltungsjahr

Das altrömische Bauernjahr begann am 1. März, das Verwaltungsjahr am 1. Januar. Wir übernehmen diese Bezeichnungen und sprechen kurz entweder von einem *Bauernjahr* oder einem *Verwaltungsjahr*. Für die Berechnung der Tagesnummer aus dem Datum eignet sich das Bauernjahr besser, da der allfällige Schalttag jeweils am Ende auftritt. Deshalb legen wir fortan allen Berechnungen und Formeln das *Bauernjahr* zugrunde und bezeichnen entsprechende Kalenderdaten mit $t.m.j$, hingegen konventionelle, auf das Verwaltungsjahr bezogene mit $t.m'.j'$. Will man die Monatszählung soweit als möglich beibehalten, so erhalten konsequenterweise Januar und Februar im Bauernjahr die Nummern 13 und 14. Die Reihe der Monate lautet nun: $3, 4, \ldots, 14$; die Monate 1 und 2 verschwinden. Es gilt der Zusammenhang

$$(m, j) = \begin{cases} (m', j') & \text{falls } m' \geq 3, \\ (m' + 12, j' - 1) & \text{sonst.} \end{cases} \tag{6}$$

Umgekehrt erhält man aus der Märzform t.m.j die konventionelle Form mit den Formeln

$$(m', j') = \begin{cases} (m, j) & \text{falls } m \leq 12, \\ (m - 12, j + 1) & \text{sonst.} \end{cases} \tag{7}$$

Da der Februar des Bauernjahres j nun in das Verwaltungsjahr $j + 1$ fällt, gilt:

$$\begin{cases} \text{Das Bauernjahr } j \text{ ist dann und nur dann ein Schaltjahr,} \\ \text{wenn die Jahreszahl } j+1 \text{ die Schaltjahrbedingung erfüllt.} \end{cases} \tag{8}$$

Wir führen den *Jahrhundertzähler* $p(j)$ ein:

$$p := p(j) := \operatorname{int} \frac{j}{100}. \tag{9}$$

Es gilt der

Satz 1 *Die Anzahl der Schalttage s_J bzw. s_G in den Bauernjahren* $0,\ 1,\ \ldots,\ j-1$ *beträgt*

$$\begin{cases} s_J = s_J(j) &=& \operatorname{int} \frac{j}{4} & \textit{im Julianischen Kalender,} \\ s_G = s_G(j) &=& \operatorname{int} \frac{j}{4} - p + \operatorname{int} \frac{p}{4} & \textit{im Gregorianischen Kalender.} \end{cases}$$

Beweis: Die Schalttage in den Bauernjahren $0,\ 1,\ \ldots,\ j-1$ fallen in die Verwaltungsjahre $1,\ 2,\ \ldots,\ j$. Von den Jahreszahlen $1,\ 2,\ \ldots,\ j$ sind genau $\operatorname{int} \frac{j}{k}$ durch k teilbar. (Hier ist wesentlich, dass die Folge der Zahlen mit 1 beginnt.) Somit ergibt sich $s_J(j) = \operatorname{int} \frac{j}{4}$. Im Gregorianischen Kalender sind die Jahre, deren Jahreszahlen durch 100, aber nicht durch 400 teilbar sind, keine Schaltjahre, weswegen $s_G(j) = \operatorname{int} \frac{j}{4} - \operatorname{int} \frac{j}{100} + \operatorname{int} \frac{j}{400}$. Mit (3) ergibt sich $\operatorname{int} \frac{j}{400} = \operatorname{int} \frac{\operatorname{int} \frac{j}{100}}{4} = \operatorname{int} \frac{p}{4}$. *q.e.d.*

Schliesslich definieren wir noch die *reduzierte Jahreszahl* n und die «Kalenderdifferenz» D:

$$n := n(j) := j \bmod 100, \quad D := D(p) := p - \operatorname{int} \frac{p}{4} - 2. \tag{10}$$

3.3 Nummerierung der Tage innerhalb eines Jahres

Wir bezeichnen

- mit t die Nummer eines Tages innerhalb des Monats m,
- mit y_m die Anzahl der Tage, die zwischen dem Ende des letzten Bauernjahres und dem Beginn des Monats m liegen,
- mit y die Nummer eines Tages innerhalb des Bauernjahres.

Aus diesen Festsetzungen folgt:

$$y = y_m + t. \tag{11}$$

Man nennt y_m die *Monatsfunktion*. Sie ist für $m = 3, \ldots, 14$ definiert; der Funktionswert ist die Summe der ersten $m - 3$ Summanden der Folge

$$31,\ 30,\ 31,\ 30,\ 31,\ 31,\ 30,\ 31,\ 30,\ 31,\ 31.$$

Für y_m ergibt sich die Wertetabelle

m	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y_m	0	31	61	92	122	153	184	214	245	275	306	337

Anhand dieser Tabelle lässt sich überprüfen, dass y_m die explizite Darstellung

$$y_m = \text{int}\,(30.6m - 91.4) = \text{int}\,\frac{153m - 457}{5}, \quad m = 3, \ldots, 14 \tag{12}$$

hat.

Um umgekehrt m und t aus y zu berechnen, setzen wir $d_m = 30.6m - 91.4 - \text{int}\,(30.6m - 91.4)$, sodass $\text{int}\,(30.6m - 91.4) = 30.6m - 91.4 - d_m$, wobei

$$d_m \in \{0,\ 0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.8\}. \tag{13}$$

Bei gegebenem Monat m folgt aus (11) zusammen mit (12), wenn t_m die Anzahl der Tage des Monats m bedeutet:

$$30.6m - 91.4 - d_m + 1 \le y \le 30.6m - 91.4 - d_m + t_m.$$

Nach Addition von 91.2 und Division durch 30.6 wird daraus

$$m + \frac{0.8 - d_m}{30.6} \le \frac{y + 91.2}{30.6} \le m + \frac{t_m - d_m - 0.2}{30.6}.$$

Wegen (13) gilt $0 \le \frac{0.8-d_m}{30.6} < 1$. Im Fall $t_m \le 30$ gilt auch $0 \le \frac{t_m-d_m-0.2}{30.6} < 1$. Diese letztere Bedingung ist jedoch auch im Fall $t_m = 31$ erfüllt, denn für $m = 3, 5, 7, 8, 10, 12, 13$ erhält man für d_m die Werte $0.4, 0.6, 0.8$ in zyklischer Reihenfolge, weswegen $\frac{t_m-d_m-0.2}{30.6} \le \frac{31-0.4-0.2}{30.6} = \frac{30.4}{30.6} < 1$. Somit folgt durch Übergang zu den ganzen Teilen

$$m = \text{int}\,\frac{y + 91.2}{30.6} = \text{int}\,\frac{5y + 456}{153}. \tag{14}$$

Schliesslich erhält man $t = y - y_m$.

3.4 Berechnung der Tagesnummer aus dem Datum

Definition 2 *Unter der* Tagesnummer *eines bestimmten Tages verstehen wir die Zahl, die diesem Tag zukommt, wenn man die Tage fortlaufend nummeriert, wobei dem 1. März 0 alten Stils die Zahl 1 zugeordnet wird. Wir bezeichnen die Tagesnummer des Tages mit dem Datum t.m.j mit*

$$\begin{cases} (t, m, j)_\mathrm{J}, & \textit{falls das Datum im alten,} \\ (t, m, j)_\mathrm{G}, & \textit{falls das Datum im neuen Stil gegeben ist.} \end{cases}$$

3.4.1 Tagesnummer aus dem Datum alten Stils

Die Reihe der Tage vom 1. März des Jahres 0 an denkt man sich in drei Abschnitte zerlegt:

- in die j vollständigen Bauernjahre $0, 1, \ldots, j-1$, unter denen sich gemäss (8) genau $s_J(j) = \text{int}\,\frac{j}{4}$ Schaltjahre befinden,
- die Tage y_m des Bauernjahres j bis vor den Monat m,
- die t Tage des Monats m.

Damit ergibt sich

$$(t, m, j)_J = 365j + \text{int}\,\frac{j}{4} + y_m + t, \tag{15}$$

mit $y_m = \text{int}\,(30.6m - 91.4) = \text{int}\,\frac{153m-457}{5}$ nach (12). Mit (1) erhält man daraus

$$(t, m, j)_J = \text{int}\,365.25j + y_m + t, \tag{16}$$

3.4.2 Tagesnummer aus dem Datum neuen Stils

Aufgrund der geänderten Schaltjahrregelung tritt gemäss Satz 1 an die Stelle von (15) die Formel

$$(t, m, j)_G = n_0 + 365j + \text{int}\,\frac{j}{4} - p + \text{int}\,\frac{p}{4} + y_m + t. \tag{17}$$

Die Konstante n_0 ergibt sich aus der historischen Festsetzung von Papst Gregor XIII, dass der 5. Oktober alten Stils und der 15. Oktober neuen Stils ein und derselbe Tag sind:

$$(15, 10, 1582)_G = (5, 10, 1582)_J. \tag{18}$$

Mit (15) und (17) folgt daraus $n_0 - \text{int}\,\frac{1582}{100} + \text{int}\,\frac{1582}{400} + 15 = 5$, also $n_0 = 2$ und schliesslich

$$(t, m, j)_G = \begin{cases} 2 + 365j + \text{int}\,\frac{j}{4} - p + \text{int}\,\frac{p}{4} + y_m + t \\ 365j + \text{int}\,\frac{j}{4} - D + y_m + t. \end{cases} \tag{19}$$

Aus (19) folgt $(t, m, n)_G = 2 + 365(100p + n) + \text{int}\,\frac{100p+n}{4} - p + \text{int}\,\frac{p}{4} + y_m + t$, wobei $\text{int}\,\frac{100p+n}{4} = \text{int}\,(25p + 0.25n)$. Mit mehrmaliger Anwendung von (1) ergibt sich daraus

$$(t, m, j)_G = 2 + \text{int}\,36524.25p + \text{int}\,365.25n + y_m + t. \tag{20}$$

3.4.3 Negative Jahreszahlen

Die oben durchgeführte Herleitung der Formeln (15), (16), (17), (19) und (20) setzt voraus, dass der Tag mit dem Datum t.m.j nicht vor dem Tag mit dem Datum 1.3.0 liegt. Die Formeln gelten jedoch für beliebige Daten, auch für beliebig frühe. Wir zeigen dies für den Fall des Gregorianischen Kalenders.

Dazu vergleichen wir die Tagesnummern zweier Tage, die um genau 400 Jahre auseinanderliegen. Nach (19) gilt:

$$\begin{cases} N_1 = (t, m, j)_G = 2 + 365j + \text{int}\,\frac{j}{4} - \text{int}\,\frac{j}{100} + \text{int}\,\frac{j}{400} + y_m + t, \\ N_2 = (t, m, j+400)_G = 2 + 365(j+400) + \text{int}\,\frac{j+400}{4} - \text{int}\,\frac{j+400}{100} + \text{int}\,\frac{j+400}{400} + y_m + t. \end{cases}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $N_2 = 2 + 365j + 365\cdot 400 + \text{int}\,\frac{j}{4} + 100 - \left(\text{int}\,\frac{j}{100} + 4\right) + \text{int}\,\frac{j}{400} + 1 + y_m + t = 2 + 365j + \text{int}\,\frac{j}{4} - \text{int}\,\frac{j}{100} + \text{int}\,\frac{j}{400} + y_m + t + 365\cdot 400 + 100 - 4 + 1 = N_1 + 365\cdot 400 + 100 - 4 + 1 = N_1 + 365\cdot 400 + 97$, somit

$$(t, m, j+400)_G - (t, m, j)_G = N_2 - N_1 = 365\cdot 400 + 97 = 146\,097. \tag{21}$$

Dabei ist $365\cdot 400 + 97 = 146\,097$ die Zahl der Tage von 400 aufeinanderfolgenden Jahren, bei beliebigem Jahresanfang.

Hat nun ein vorgelegtes Datum eine negative Jahreszahl, so verschieben wir es so um ein Vielfaches von 400 Jahren, dass die Jahreszahl positiv wird, wenden (19) an und subtrahieren vom Resultat das entsprechende Vielfache von 146 097. Auf diesem Wege erhalten wir sicher die richtige Tagesnummer. Aber (21) besagt, dass die Anwendung von (19) auf das ursprünglich vorgelegte Datum zur selben Tagesnummer geführt hätte. (Hier ist wesentlich, dass $\text{int}\,x$ die klassische Bedeutung hat.)

3.5 Berechnung des Datums aus der Tagesnummer

3.5.1 Datum alten Stils aus der Tagesnummer

Nach (15) gehört zu einem gegebenen Jahr j die kleinste Tagesnummer (des 1. März)

$$N_{\min} = \operatorname{int} 365.25j + 0 + 1 = \operatorname{int} 365.25j + 1,$$

die grösste (des Vortages des 1. März des Folgejahres)

$$N_{\max} = \operatorname{int} 365.25(j+1) + 0 + 1 - 1 = \operatorname{int} 365.25(j+1).$$

Für ganzzahlige k gilt $\operatorname{int} 365.25k = 365.25k - d$, wobei $0 \le d \le 0.75$. Somit gehört der Tag mit der Tagesnummer N dann und nur dann zum Jahr j, wenn für gewisse d und d'

$$365.25j - d + 1 \le N \le 365.25(j+1) - d',$$

mit $0 \le d, d' \le 0.75$. Subtraktion von 0.25 und Division durch 365.25 ergibt

$$j + \frac{0.75 - d}{365.25} \le \frac{N - 0.25}{365.25} \le j + \frac{365 - d'}{365.25}.$$

Der Übergang zu den ganzen Teilen führt wegen $0 \le \frac{0.75-d}{365.25}, \frac{365-d'}{365.25} < 1$ zu $j \le \operatorname{int} \frac{N-0.25}{365.25} \le j$ und somit zu

$$j = \operatorname{int} \frac{N - 0.25}{365.25} = \operatorname{int} \frac{4N-1}{1461}.$$

Mit (14), (15) und (12) ergibt sich schliesslich:

Satz 2 *Man erhält das Datum t.m.j alten Stils aus der Tagesnummer N in folgenden Schritten:*

$$\left\{\begin{array}{lcll} j & = & \operatorname{int} \dfrac{4N-1}{1461}, & \\ m & = & \operatorname{int} \dfrac{5y+465}{153}, & \textit{wobei } y = N - \operatorname{int} 365.25j, \\ t & = & y - y_m, & \textit{wobei } y_m = \operatorname{int} \frac{153m-457}{5}. \end{array}\right.$$

3.5.2 Datum neuen Stils aus der Tagesnummer

Das Bauernjahrhundert p beginnt mit dem 1. März des Jahres $100p$ und endet mit dem *Vortag* des 1. März des Jahres $100(p+1)$. Für diese beiden Tage ergeben sich gemäss (20) die Tagesnummern

$$\left\{\begin{array}{lcl} N_{\min} & = & 2 + \operatorname{int} 36524.25p + 0 + 1 = 2 + \operatorname{int} 36524.25p + 1, \\ N_{\max} & = & 2 + \operatorname{int} 36524.25(p+1) + 0 + 1 - 1 = 2 + \operatorname{int} 36524.25(p+1). \end{array}\right.$$

Dabei gilt für gewisse d und d':

$$\left\{\begin{array}{rcl} \operatorname{int} 36524.25p & = & 36524.25p - d, \\ \operatorname{int} 36524.25(p+1) & = & 36524.25(p+1) - d', \end{array}\right.$$

wobei $0 \le d, d' \le 0.75$. Die Bedingung $N_{\min} \le N \le N_{\max}$ für die Tage N des Bauernjahrhunderts p bedeutet somit $36524.25p + 1 - d \le N - 2 \le 36524.25(p+1) - d'$, woraus sich durch Subtraktion von 0.25 und Division durch 36524.25

$$p + \frac{0.75 - d}{36524.25} \le \frac{N - 2.25}{36524.25} \le p + \frac{36524 - d'}{36524.25}$$

ergibt. Durch Übergang zu den ganzen Teilen erhält man wegen $0 \le d, d' \le 0.75$

$$p = \operatorname{int} \frac{N - 2.25}{36524.25} = \operatorname{int} \frac{4N - 9}{146097}. \tag{22}$$

Das Bauernjahr $100p + n$ beginnt mit dem 1. März des Jahres $100p + n$ und endet mit dem *Vortag* des 1. März des Jahres $100p + n + 1$. Setzt man

$$N' = N - 2 - [36524.25p], \tag{23}$$

so gilt für diese beiden Tage

$$\begin{cases} N'_{\min} &= \operatorname{int} 365.25n + 1, \\ N'_{\max} &= \operatorname{int} 365.25(n+1) + 1 - 1 = \operatorname{int} 365.25(n+1). \end{cases}$$

Dabei gilt für gewisse d und d':

$$\begin{cases} \operatorname{int} 365.25n &= 365.25n - d, \\ \operatorname{int} 365.25(n+1) &= 365.25(n+1) - d', \end{cases}$$

mit $0 \le d, d' \le 0.75$. Die Bedingung $N'_{\min} \le N' \le N'_{\max}$ bedeutet somit $365.25n + 1 - d \le N' \le 365.25n + 365.25 - d'$. Durch Subtraktion von 0.25 und Division durch 365.25 ergibt sich

$$n + \frac{0.75 - d}{365.25} \le \frac{N' - 0.25}{365.25} \le n + \frac{365 - d'}{365.25}.$$

Durch Übergang zu den ganzen Teilen erhält man wegen $0 \le d, d' \le 0.75$

$$n = \operatorname{int} \frac{N' - 0.25}{365.25} = \operatorname{int} \frac{4N' - 1}{1461}. \tag{24}$$

Mit (20) folgt $y = N' - \operatorname{int} 365.25n$. Mit (14) und (12) sowie der Beziehung $t = y - y_m$ erhält man der Rehe nach m, y_m und t.

Wir haben bewiesen:

Satz 3 *Man erhält das Datum t.m.j neuen Stils aus der Tagesnummer N in folgenden Schritten:*

$$\begin{cases} j &= 100p + n, & \textit{wobei } p = \operatorname{int} \frac{4N-9}{146097}, \quad N' = N - 2 - \operatorname{int} 36524.25p, \quad n = \operatorname{int} \frac{4N'-1}{1461}, \\ m &= \operatorname{int} \dfrac{5y + 465}{153}, & \textit{wobei } y = N' - \operatorname{int} 365.25n, \\ t &= y - y_m, & \textit{wobei } y_m = \operatorname{int} \frac{153m - 457}{5}. \end{cases}$$

3.6 Tagesnummer und Wochentag

Beispiel 3.1 *Wie ermittelt man den Wochentag aus der Tagesnummer?* Der japanische Überfall auf Pearl Harbor fand am 7. Dezember 1941 statt. Wie historisch Bewanderte und Liebhaber von Hollywoodfilmen wissen, war das ein Sonntag. (In Japan war schon Montag, 8. Dezember, was die Operationsplanung komplizierte.) Mit $t = 7$, $m = m' = 12$, $j = j' = 1941$ ergibt sich $p = 19$, $D = 19 - \operatorname{int} \frac{19}{4} - 2 = 13$, $y_{12} = \operatorname{int} \frac{153 \cdot 12 - 457}{5} = 275$. Mit (19) folgt: $(7, 12, 1941)_G = 365 \cdot 1941 + \operatorname{int} \frac{1941}{4} - 13 + 275 + 7 = 709\,219 = 7 \cdot 101\,317$. Man schliesst daraus, dass ein Sonntag vorliegt, wenn $N \bmod 7 = 0$.

Satz 4 *Setzt man $W = N \bmod 7$, so liegt genau dann ein Sonntag vor, wenn $W = 0$. Weiter bedeutet $W = 1$, dass ein Montag vorliegt, usw.*

Unabhängig von der konventionellen Datumsbezeichnung können wir bei vorgegebenem Jahr j

$$\text{März } t \text{ des Jahres } j$$

als Definition eines zusätzlichen Tageszählers t betrachten, welcher dem 1. März des Jahres j die Nummer 1 zuordnet. Dann ist in jedem Fall März 365 der 28. Februar des Folgejahres. März 366 ist der 29. Februar, falls das Folgejahr ein Schaltjahr, der 1. März, falls das Folgejahr ein Gemeinjahr ist. Im Hinblick auf die Berechnung des Osterdatums aus der Ostergrenze beweisen wir das folgende

Lemma 3.1 *Der erste Sonntag nach März t des Jahres j hat das Datum*

$$\textit{März } t + 1 + (6 - N) \bmod 7,$$

wobei N die Tagesnummer von März t ist und

$$(6 - N) \bmod 7 = \begin{cases} (2b + 4c + 6t + 6) \bmod 7 & \textit{im Julianischen Kalender,} \\ (2b + 4c + 6t + 6 + D) \bmod 7 & \textit{im Gregorianischen Kalender.} \end{cases}$$

Beweis: Ist W der Wochentag von März t (des Jahres j), so fällt der nächste Sonntag auf März $t+(7-W)$. Nach Satz 4 ist dabei $W = N \bmod 7$. Mit (4) folgt: $W + (6-N) \bmod 7 = 6$, $7-W = 1+(6-N) \bmod 7$, und somit fällt der folgende Sonntag auf

$$\text{März } t + 1 + (6-N) \bmod 7.$$

Es genügt, die restliche Behauptung für den Fall des Gregorianischen Kalenders zu beweisen. Der Vergleich von (15) mit (19) zeigt, dass für den Julianischen Kalender einfach $D = 0$ gesetzt werden kann. Mit $j = j'$, $t = t'$ und $p = p'$ ergibt (19): $N = 365j + \operatorname{int}\frac{j}{4} + t - D$. Damit wird $6 - N = 6 - 365j - \operatorname{int}\frac{j}{4} - t + D$, also $(6-N) \bmod 7 = (6 - j - \operatorname{int}\frac{j}{4} + 6t + D) \bmod 7 = (6 - 3j + 2j - 8\operatorname{int}\frac{j}{4} + 6t + D) \bmod 7 = \big(6 + 4j + 2\left(j - 4\operatorname{int}\frac{j}{4}\right) + 6t + D\big) \bmod 7 = (2(j \bmod 4) + 4(j \bmod 7) + 6t + D) \bmod 7 = (2b + 4c + 6t + D) \bmod 7$. *q.e.d.*

Das eben bewiesene Lemma ist an sich für beliebige natürliche Werte von t richtig, aber von praktischem Wert nur innerhalb des am 01.03.j beginnenden ≪Bauernjahres≫, da sonst wiederum die Schalttage berücksichtigt werden müssen.

3.7 Die Kalenderdifferenz

Definition 3 *Ist t.m.j ein in beiden Kalendern mögliches Datum - also nicht der 29.02. in einem Mischjahr -, so nennt man die Differenz*

$$(t, m, j)_\mathrm{J} - (t, m, j)_\mathrm{G}.$$

der beiden zugehörigen Tagesnummern die Kalenderdifferenz *des Datums t.m.j.*

Aus (15) und (19) folgt somit:

Satz 5 *Ist t.m.j ein in beiden Kalendern mögliches Datum, so beträgt die zugehörige Kalenderdifferenz $D(p)$.*

Zum Beispiel findet man für das Datum 15.10.1582 mit $p = p' = 15$ die Kalenderdifferenz $D(15) = 15 - \operatorname{int}\frac{15}{4} - 2 = 10$, was bedeutet, dass der 15. Oktober 1582 im Julianischen Kalender 10 Tage später als im Gregorianischen stattfindet, gemäss der historischen Festsetzung (18) von Papst Gregor XIII. Für das Datum 01.03.0 ergibt sich $D(0) = -2$. Die negative Kalenderdifferenz bedeutet, dass sich hier die Verhältnisse umkehren: Der 1. März 0 hat im hat im Julianischen Kalender zwei Tage früher stattgefunden als im Gregorianischen. Deswegen hat im Gregorianischen Kalender der 1. März des Jahres 0 die Tagesnummer 3. Im 19. Jahrhundert (genau: für die Kalenderdaten vom 01.03.1800 bis zum 28.02.1900) betrug die Kalenderdifferenz 12. Für den 29.02.1900 ist sie nicht definiert; seit dem Datum 01.03.1900 hat sie den Wert 13, welchen sie bis zum 28.02.2100 beibehalten wird. Für das Datum 29.02.2100 ist sie wiederum nicht definiert. Beim Datum 01.03.2100 erhöht sie sich auf 14. (Am 01.03.2000 hat sie ihren Wert beibehalten, da das Jahr 2000 sowohl ein Julianisches, als auch ein Gregorianisches Schaltjahr ist.)

3.7.1 Verwandlung Julianischer Daten in Gregorianische

Für ein Julianisch zulässiges Datumstripel (t, m, j) gilt, sofern dieses auch Gregorianisch zulässig ist, nach Satz 5

$$(t, m, j)_J = (t, m, j)_G + D. \tag{25}$$

Beispiel 3.2 *Die Schlacht von Sempach fand gemäss Julianischem Kalender am 9. Juli 1386 statt.* Mit $p = 13$ findet man $D = 13 - \operatorname{int}\frac{13}{4} - 2 = 8$. Aus (25) ergibt sich

$$(9, 7, 1386)_J = (9, 7, 1386)_G + 8 = (8 + 8, 7, 1386)_G = (17, 7, 1386)_G.$$

Gemäss Gregorianischem Kalender fand die Schlacht am 17. Juli 1386 statt.

Beispiel 3.3 *Welches Gregorianische Datum hat der Tag mit dem Julianischen Datum 29. Februar 1900?* Das Jahr 1900 ist ein Mischjahr: Es ist wohl im Julianischen, nicht aber im Gregorianischen

Kalender ein Schaltjahr. Somit ist das Datum 29.02.1900 im Gregorianischen Kalender nicht zulässig. Wir weichen deshalb auf den 28.02.1900 aus, für welchen die Kalenderdifferenz definiert ist. Es gilt: $(28, 14, 1899)_J = (28, 14, 1899)_G + D$, mit $D = 18 - \text{int}\,\frac{18}{4} - 2 = 12$, somit $(28, 14, 1899)_J = (28, 14, 1899)_G + 12 = (28 + 12, 14, 1899)_G = (40, 14, 1899)_G = (12, 1, 1900)_G$. Der nachfolgende Tag, der 29. Februar 1900 alten Stils, ist somit der 13. März 1900 neuen Stils.

Beispiel 3.4 *Wann fand gemäss Gregorianischem Kalender das russische Neujahr im Jahre 2008 statt, und an welchem Wochentag?* Die russischen Feiertage richten sich auch heute noch nach dem Julianischen Kalender. Nach (15) gilt: $(1, 13, 2007)_J = 365 \cdot 2007 + \text{int}\,\frac{2007}{4} + 306 + 1 = 733363 = 7 \cdot 104766 + 1$, also handelt es sich nach Satz 4 um einen *Montag*. Gemäss Satz 5 ist $D = 20 - \text{int}\,\frac{20}{4} - 2 = 13$, also ergibt sich mit (julgreg) $(1, 13, 2007)_J = (1, 13, 2007)_G + 13 = (14, 13, 2007)_G$. Es handelt sich also um den 14. Januar 2008 neuen Stils. Ein Blick in die Agenda neuen Stils bestätigt, dass dieser Tag ein Montag war.

3.7.2 Verwandlung Gregorianischer Daten in Julianische

Jedes Gregorianisch zulässige Datumstripel ist auch Julianisch zulässig. Nach Satz 5 gilt:

$$(t, m, j)_G = (t, m, j)_J - D. \tag{26}$$

Beispiel 3.5 *Die Schlacht von Sempach hat im Gregorianischen Kalender das Datum 17. Juli 1386.* Aus (5) ergibt sich $D = 8$. Also gilt gemäss (26)

$$(17, 7, 1386)_G = (17, 7, 1386)_J - 8 = (17 - 8, 7, 1386)_J = (9, 7, 1386)_J.$$

Beispiel 3.6 *Welches Julianische Datum hat der Gregorianische 13. März 1900?* Aus (5) folgt: $D = 13$. Da 1900 ein Julianisches Schaltjahr ist, ergibt sich $(13, 3, 1900)_J - 13 = (13 + 29, 14, 1899)_J - 13 = (29, 14, 1899)_J$, und nach (26)

$$(13, 3, 1900)_G = (29, 14, 1899)_J.$$

Es handelt sich also um den 29. Februar 1900 alten Stils. Die folgende Tabelle zeigt die Verhältnisse beim Übergang vom Februar zum März des Mischjahres 1900:

Tagesnummer	WT	Julianisch	D	Gregorian.	D
693961	Di	15.02.1900	12	27.02.1900	12
693962	Mi	16.02.1900	12	28.02.1900	12
693963	Do	17.02.1900	12	01.03.1900	13
693964	Fr	18.02.1900	12	02.03.1900	13
693965	Sa	19.02.1900	12	03.03.1900	13
693966	So	20.02.1900	12	04.03.1900	13
693967	Mo	21.02.1900	12	05.03.1900	13
693968	Di	22.02.1900	12	06.03.1900	13
693969	Mi	23.02.1900	12	07.03.1900	13
693970	Do	24.02.1900	12	08.03.1900	13
693971	Fr	25.02.1900	12	09.03.1900	13
693972	Sa	26.02.1900	12	10.03.1900	13
693973	So	27.02.1900	12	11.03.1900	13
693974	Mo	28.02.1900	12	12.03.1900	13
693975	Di	29.02.1900	—	13.03.1900	13
693976	Mi	01.03.1900	13	14.03.1900	13
693977	Do	02.03.1900	13	15.03.1900	13

Die Kalenderdifferenz ist jeweils hinter dem Datum aufgeführt. Der Tagesnummer bezieht sich auf die beiden Daten derselben Zeile. Zum Beispiel erfährt man aus der vierten Zeile, dass der Tag mit der Tagesnummer 693964 im Julianischen Kalender der 18. Februar 1900, im Gregorianischen der 2. März 1900 ist.

3.8 Gleichzeitige Jahresanfänge

Beispiel 3.7 *Für welche Jahreszahlen j beginnt das Verwaltungsjahr j nach beiden Kalendern am gleichen Tag?* Die Bedingung $D = p - \operatorname{int} \frac{p}{4} - 2 = 0$ führt notwendig auf $p = 2$, wobei für den Jahresanfang $p = \operatorname{int} \frac{j-1}{100}$ zu wählen ist. Also lautet die Bedingung

$$\operatorname{int} \frac{j-1}{100} = 2.$$

Sie wird genau von den 100 Jahreszahlen $j = 201, 202, \ldots, 300$ erfüllt:

Tagesnummer	WT	Julianisch	Gregorianisch
72991	Di	01.01.200	31.12.199
73357	Do	01.01.201	01.01.201
73722	Fr	01.01.202	01.01.202
...	...	...	...
109151	So	01.01.299	01.01.299
109516	Mo	01.01.300	01.01.300
109882	Mi	01.01.301	02.01.301

Übung 3.1 *Für welche Jahreszahlen j beginnt das Julianische Verwaltungsjahr j am selben Tag wie das Gregorianische Verwaltungsjahr $j + 1$?*

Übung 3.2 *Für welche Jahreszahlen j beginnt das Julianische Verwaltungsjahr j am gleichen Tag wie das Gregorianische Verwaltungsjahr $j + 2$?*

4 Ostern

Gemäss ursprünglicher Definition ist *Ostern* der erste Sonntag nach dem ersten Vollmond nach dem Frühlingsäquinoktium. Aus zwei Gründen ist diese Definition jedoch ungeeignet zur Bestimmung eines Kalenderdatums. Der erste, logische Grund liegt darin, dass auf der Erde zu jedem Zeitpunkt zwei verschiedene Kalenderdaten gültig sind, wenn man vom Augenblick absieht, da an der Datumsgrenze der neue Tag anbricht. Fällt zum Beispiel der entscheidende Vollmond in Los Angeles noch auf den Samstag, während in Sydney schon der Sonntag begonnen hat, so hätte dort Ostern eine Woche später stattzufinden als in Los Angeles. Der zweite, praktische Grund liegt darin, dass die Bewegung der Erde um die Sonne und besonders diejenige des Mondes um die Erde nicht vollkommen gleichmässig verlaufen, was die genaue Berechnung von Frühlingsäquinoktium und Zeitpunkt des Vollmondes schwierig, jedenfalls aufwendig macht. Zur praktischen Umsetzung der Osterdefinition mussten deshalb die beiden entscheidenden astronomischen Zeitpunkte durch bequem berechenbare Kalenderdaten angenähert werden. Dies geschah im Jahre 325 am Konzil von Nikäa. An die Stelle des Frühlingsäquinoktiums wurde der 20. März gesetzt, für die darauf folgenden Vollmonde der *kirchliche Mondkalender* aufgestellt.

Definition 4 Ostern *ist der erste Sonntag nach dem ersten* kirchlichen *Vollmond nach dem 20. März. Der entscheidende kirchliche Vollmond heisst* kirchliche Ostergrenze*.*

4.1 Die Ostergrenze: eine heuristische Überlegung

Der *kirchliche Mondkalender* ersetzt die schwierige Berechnung der astronomischen Mondphasen durch ein leicht handhabbares ganzzahliges Regelwerk. Er legt sämtliche *Neulicht*-Termine fest. Neulich ist ein Tag nach Neumond. Der kirchliche Mondkalender bestimmt, dass Vollmond 14 Tage nach Neumond, also 13 Tage nach Neulicht eintritt.

Definition 5 *Unter der* Epakte *eines bestimmten Jahres versteht man das Alter des Mondes (die seit dem letzten Neumond vergangene Zeit) zu Beginn des letzten Tages des Vorjahres.*

Der kirchliche Mondkalender besteht aus zwei voneinander unabhängigen Teilen: einer Vorschrift zur Berechnung der zu einem beliebigen Jahr gehörigen Epakte sowie Tabellen, welche zu jedem möglichen Epaktenwert die dazugehörigen Neulicht-Daten aufzählen. Dabei wird auf Schaltjahre keine Rücksicht genommen. Entsprechend der Zielsetzung des Mondkalenders ist die kirchliche Epakte eine ganze Zahl. Die Neulicht-Termine werden in nicht ganz regelmässig abwechselnden Abständen von 30 und 29 Tagen angesetzt. Indem wir die Überlegungen, die im Einzelnen zu den Neulicht-Terminen geführt haben, ausser Acht lassen, geben wir eine plausible Überlegung zum Auffinden der Ostergrenze an, von der sich nachträglich zeigen wird, dass wir damit im Fall des Julianischen Kalenders schon am Ziel sind, während für den Gregorianischen Kalender noch die beiden ≪Ausnahmeregeln≫ zu beachten sind.

Die Zeit von einem Neumond zum nächsten, der sogenannte *synodische Monat*, schwankt in unregelmässiger Weise um mehr als einen halben Tag, nämlich zwischen 29.27 und 29.83 Tagen. Der Mittelwert beträgt

$$L = 29.530589 \text{ Tage.} \tag{27}$$

Unsere heuristische Überlegung stützen wir auf die folgenden vereinfachenden Annahmen:

(1) Die Epakte ist eine ganze Zahl unterhalb von 30.

(2) Neumonde und Vollmonde folgen im genauen zeitlichen Abstand $\frac{L}{2}$ aufeinander (≪ausgeglichener Mond≫).

(3) Der Februar hat immer 28 Tage (keine Berücksichtigung von Schaltjahren).

Unter diesen Voraussetzungen treten die Vollmonde, welche auf den für die Epakte massgeblichen 31. Dezember des Jahres $j-1$ folgen, am

$$\text{Dezember } (31 - E) + \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot L \tag{28}$$

ein, wobei $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. (Dezember $31 - E$ ist das Datum des letzten Neumondes im Jahre $j-1$.) Die als Ostergrenze in Frage kommenden Vollmonde ergeben sich für $k = 3$ und $k = 4$, nämlich als

$$\text{Dezember } 134.36 - E \text{ und Dezember } 163.89 - E.$$

Wegen der Vernachlässigung der Schalttage können bei der Umrechnung auf den kommenden März ausnahmslos 31+31+28 = 90 Tage subtrahiert werden. Somit kommen, nach dem Runden auf ganzzahhligem Tage, als Ostergrenzen nur noch

$$\text{März } 44 - E \text{ und März } 74 - E \tag{29}$$

in Frage. Der erste Termin, März $44 - E$, erfüllt die Bedingung ≪nach dem 20. März≫ genau dann, wenn $E < 24$. Andernfalls ist März $74 - E$ die Ostergrenze. Mit

$$E' = (E + 6) \bmod 30 \tag{30}$$

gilt: $E = E' - 6$, falls $E < 24$, und $E = E' + 24$ sonst. Aus März $44 - E$ wird somit März $44 - (E' - 6)$, und aus März $74 - E$ wird März $74 - (E + 24)$; in beiden Fällen erhält man März $50 - E'$. Setzt man

$$d := 29 - E', \tag{31}$$

so folgt: $50 - E' = 50 - (29 - d) = 21 + d$.

Satz 6 *Die provisorische Ostergrenze fällt auf März* $21 + d$*.*

Es bleibt beizufügen, dass die obige Überlegung weder zwingend noch ganz ≪robust≫ ist. Nach der Vorschrift des kirchlichen Mondkalenders, wonach Vollmond 14 Tage nach Neumond ist, käme man statt (28) auf den Ansatz

$$\text{Dezember } (31 - E) + 14 + k \cdot L,$$

welcher zwar auch März $44 - E$, aber März $73 - E$ statt März $74 - E$ ergäbe.

4.2 Die kirchliche Epakte

Wir befassen uns nun mit dem ersten Teil des kirchlichen Mondkalenders, demjenigen, in welchem die Regeln für die Berechnung der Epakte aufgestellt werden. Mit (30) und (31) folgen dann daraus, getrennt für die beiden Kalenderarten, konkrete Formeln für E' und d, und mit Satz 6 ergibt sich die ≪provisorische≫ Ostergrenze. Es wird sich zeigen, dass diese mit der kirchlichen übereinstimmt, jedenfalls im Julianischen Kalender.

Ausgangspunkt für den kirchlichen Mondkalender ist die merkwürdige Tatsache des *Metonischen Zyklus*: 235 synodische Monate (vgl. (27)) dauern fast genau gleich lang wie 19 mittlere Julianische Jahre. Der kirchliche Mondkalender kümmert sich nicht um das ≪fast≫, sondern setzt die beiden Zeiträume einander exakt gleich. Deshalb haben *im Julianischen Kalender* sämtliche Monddaten, darunter Neumonde und Vollmonde, die Periode 19 Jahre. Zu einem beliebig festgesetzten Zeitpunkt des Jahres wiederholt sich im selben zeitlichen Abstand auch das Mondalter (die seit dem letzten Neumond vergangene Zeit). Insbesondere trifft dies auf die Epakte und somit, wegen Satz 6, auch auf die Ostergrenze zu. Hier endet allerdings die direkte Wirkung des Metonischen Zyklus, da die Festsetzung von Ostern auf einen *Sonntag* zusätzlich den Siebnerzyklus der Wochentage ins Spiel bringt. Obwohl also der Metonische Zyklus ans Julianische Jahr gebunden ist, hat man ihn beim Übergang zum Gregorianischen Jahr nicht einfach ersetzt, sondern vielmehr durch eine Anpassung gerettet: Er lebt im Gregorianischen Mondkalender fort.

Die Abkürzung

$$a := a(j) := j \bmod 19 \tag{32}$$

geht auf C. F. Gauss zurück.

Definition 6 *Ein Zeitraum von 19 aufeinanderfolgenden Jahren wird* Metonischer Zyklus *genannt, sofern er mit einem Jahr beginnt, für welches* $a = 0$ *ist (dessen Jahreszahl durch 19 teilbar ist).*

(Traditionell wird anstelle von a auch die *goldene Zahl* $g := 1 + a$ verwendet.)

4.2.1 Die Julianische Epakte

Auf ein Jahr entfallen $\frac{235}{19} = 12\frac{7}{19}$ Umläufe des Mondes. Die Epakte wächst infolgedessen von einem Jahr zum nächsten durchschnittlich um $\frac{7}{19}$ der Zeit eines Mondumlaufs. Dies bedeutet eine jährliche Zunahme von ungefähr 11 Tagen. Nach rund 30 Tagen tritt der nächste Neumond dazwischen. Deshalb wird die kirchliche Julianische Epakte als

$$E_J := E_J(j) := (11a + 8) \bmod 30 \tag{33}$$

definiert. Die additive Konstante 8 ergab zur Zeit des frühen Mittelalters eine befriedigende Übereinstimmung mit der astronomischen Wirklichkeit. Mit (30) folgt aus (33)

$$E'_J := E'_J(j) = (11a + 14) \bmod 30. \tag{34}$$

4.2.2 Die Gregorianische Epakte

Leider ist - sogar im Julianischen Kalender - der Metonische Zyklus nur eine Annäherung. Das Julianische Jahr, in welchem jedes vierte Jahr ein Schaltjahr ist, umfasst im Mittel genau 365.25 Tage. Während eines Zyklus hinkt im Mittel die Sonne dem Mond um

$$19 \cdot 365.25 - 235L = 0.061585 \text{ Tage} = 1\,\text{h}\ 28\,\text{min}\ 41\,\text{s} \tag{35}$$

hinterher. Auf 2500 Jahre macht dies $0.06158 \cdot \frac{2500}{19} \approx 8.103$ Tage aus. Um soviel wächst die Epakte zusätzlich in 2500 Jahren. Der Term

$$\operatorname{int} \frac{8p + 13}{25} - 5,$$

von C. F. Gauss zu diesem Zweck vorgeschlagen, gibt diese Zunahme wieder. Er hat für $p = 14,\ 15,\ 16,\ 17$ den Wert 0 und erhöht sich jedesmal um 1, wenn

$$p \bmod 25 \in \{2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14;\ 18,\ 21,\ 24\}, \tag{36}$$

liefert also innerhalb von 2500 Jahren genau 8 zusätzliche Tage. Die präzisierte Julianische Epakte lautet deshalb, unter Berücksichtigung der Tatsache, dass sie bis ins 16. Jahrhundert um 3 Tage zu klein geworden war,

$$E_J^+ = \left(11a + 8 + 3 + \operatorname{int} \frac{8p + 13}{25} - 5\right) \bmod 30.$$

Damit verringert sich der Fehler auf 0.10329 Tage pro 2500 Jahre, d.h. auf etwa einen Tag pro 25 000 Jahre. Beim Übergang zum Gregorianischen Kalender vermindert sich der Tagesnummer des 31.12. um die Kalenderdifferenz, wodurch die Epakte sich um D vermindert (mod 30). Entsprechend definiert man die Gregorianische Epakte als

$$E_G := \left(11a + 8 + 3 + \operatorname{int} \frac{8p + 13}{25} - 5 - \left(p - \operatorname{int} \frac{p}{4} - 2\right)\right) \bmod 30. \tag{37}$$

Statt p wäre der Wert $\operatorname{int} \frac{j-1}{100}$ naheliegend, da es sich bei der Epakte um das Mondalter am $31.12.j - 1$, also um ein Datum vor dem $1.3.j$ handelt. Ein Vergleich mit den offiziellen Osterdaten zeigt jedoch, dass man $p = \operatorname{int} \frac{j}{100}$ zu verwenden hat (vgl. Abschnitt 5.7). Wir verwenden die Abkürzungen

$$M := M(p) := \operatorname{int} \frac{8p + 13}{25}, \quad S := S(p) := p - \operatorname{int} \frac{p}{4}. \tag{38}$$

Aus (refpqepakte) ergibt sich damit

$$E_G := E_G(j) = (11a + 8 + M - S) \bmod 30.$$

und

$$E'_G := E'_G(j) = (E_G + 6) \bmod 30 = (11a + 14 + M - S) \bmod 30. \tag{39}$$

Wie sich in Abschnitt 6.3 zeigen wird, weicht die Gregorianische kirchliche Epakte im Zeitraum von 1700 bis 2035 weniger als 2 Tage von der wahren astronomischen ab. Die grösste negative Abweichung wird 1781 mit 1.17, die grösste positive 1848 mit 1.85 Tagen erreicht.

4.3 Die kirchliche Ostergrenze

Lemma 4.1 *Gemäss Definition (31) ist* $d = 29 - E'$*. Getrennt nach den beiden Kalendern gilt:*

$$\begin{cases} d_J & := & d_J(j) & := & 29 - E'_J & = & (19a + 15) \ mod\ 30, \\ d_G & := & d_G(j) & := & 29 - E'_G & = & (19a + 15 - M + S) \ mod\ 30. \end{cases}$$

Beweis: Wir nehmen den Gregorianischen Fall an. Der Vergleich von (34) mit (39) zeigt, dass sich der Julianische Fall einfach dadurch ergibt, dass man 0 an die Stelle von M und S setzt. Mit (4) schliesst man aus (39)

$$E'_G + (29 - (11a + 14 + M - S)) \bmod 30 = 29,$$

daraus $-E'_G = (-11a+15-M+S) \bmod 30 - 29 = (19a+15-M+S) \bmod 30 - 29$ und $d_G = 29 - E'_G = (19a + 15 - M + S) \bmod 30.$ *q.e.d.*

Für den Fall des *Gregorianischen Kalenders* formulieren wir die beiden ≪Ausnahmeregeln≫

$$d^*_G := \begin{cases} 28, & \text{falls } d_G = 29, \\ 27, & \text{falls } d_G = 28 \text{ und } \textit{vorgängig} \text{ im selben Metonischen Zyklus } d = 29 \text{ auftritt}, \\ d_G & \text{sonst.} \end{cases} \tag{40}$$

Satz 7 *Die kirchliche Ostergrenze fällt auf*

$$\begin{cases} \textit{März } 21 + d_J & \textit{im Julianischen Kalender}, \\ \textit{März } 21 + d^*_G & \textit{im Gregorianischen Kalender.} \end{cases}$$

4.3.1 Die Ostergrenze im Julianischen Kalender

Wir beweisen nun den Satz 7 für den Fall des Julianischen Kalenders.

Beweis: Da während eines Metonischen Zyklus a die Zahlen von 0 bis 18 durchläuft, nimmt dabei E_J nach (33) der Reihe nach die Werte

$$E_J = 8, 19, 0, 11, 22, 3, 14, 25, 6, 17, 28, 9, 20, 1, 12, 23, 4, 15, 26 \tag{41}$$

an. Für diese Epaktenwerte legt der kirchliche Mondkalender laut Bachmann[1] (Tabelle 10) die für die Ostergrenze entscheidenden *Neulicht*-Termine auf

März 23, 12, 31, 20, 9, 28, 17, 36, 25, 14, 33, 22, 11, 30, 19, 8, 27, 16, 35,

woraus sich die *kirchlichen Ostergrenzen* (Vollmond ist 13 Tage nach Neulicht)

$$\text{März } 36, 25, 44, 33, 22, 41, 30, 49, 38, 27, 46, 35, 24, 43, 32, 21, 40, 29, 48 \tag{42}$$

ergeben. Anderseits erhält man für die Werte (41) mit (30) $E'_J = (E_J + 6) \bmod 30 = 14, 25, 6, 17, 28, 9, 20, 1, 12, 23, 4, 15, 26, 7, 18, 29, 10, 21, 2$, mit (31) $d_J = 29 - E'_J = 15, 4, 23, 12, 1, 20, 9, 28, 17, 6, 25, 14, 3, 22, 11, 9, 19, 8, 27$ und damit für März $21 + d_J$ die Daten

März 36, 25, 44, 33, 22, 41, 30, 49, 38, 27, 46, 35, 24, 43, 32, 21, 40, 29, 48,

in Übereinstimmung mit (42). *q.e.d.*

4.3.2 Die Ostergrenze im Gregorianischen Kalender

Als nächstes beweisen wir den Satz 7 für den Fall des Gregorianischen Kalenders.

Beweis: Zwar sind für die schon im Julianischen Kalender auftretenden Epaktenwerte einige Neulicht-Daten leicht korrigiert worden, wovon aber die für die Ostergrenze entscheidenden nicht betroffen sind. Für die in (41) aufgezählten Werte der Epakte kann der Beweis, der im Julianischen Kalender gilt, übernommen werden, da die verwendeten Beziehungen $E' = (E + 6) \bmod 30$, $d = 29 - E'$ in beiden Kalendern gelten und durchwegs $d^*_G = d_G$ gilt, da der Epaktenwert 29 gar nicht auftritt. Wegen des

Störgliedes $M - S$ sind jedoch im Gregorianischen Kalender alle Werte von 0 bis 29 möglich. Für die zusätzlichen 11 Werte

$$E_G = 2, 5, 7, 10, 13, 16, 18, 21, 24, 27, 29 \tag{43}$$

lauten die entscheidenden kirchlichen Neulichttermine gemäss BACHMANN[1] (Tabelle 11)

$$\text{März } 29, 26, 24, 21, 18, 15, 13, 10, 36, 34, 32,$$

woraus sich die kirchlichen Ostergrenzen (13 Tage nach Neulicht) zu

$$\text{März } 42, 39, 37, 34, 31, 28, 26, 23, 49, 47, 45 \tag{44}$$

ergeben. Anderseits erhält man für die Werte (43) mit (30) $E'_G = 8, 11, 13, 16, 19, 22, 24, 27, 0, 3, 5$, mit (31) $d_G = 21, 18, 16, 13, 10, 7, 5, 2, 29, 26, 24$ und mit (40) $d^*_G = 21, 18, 16, 13, 10, 7, 5, 2, 28, 26, 24$. Die behaupteten Ostergrenzen sind März $21 + d^*_G$, somit

$$\text{März } 42, 39, 37, 34, 31, 28, 26, 23, 49, 47, 45.$$

Sie stimmen mit den kirchlichen (44) überein.

Für $E_G = 25$ fügt Tabelle 11 ein zweites, zusätzliches Neulicht-Datum März 35 zum schon definierten Datum März 36 hinzu. Das zweite ist dann und nur dann zu verwenden, wenn der zweite Ausnahmefall eintritt, wenn also im selben Metonischen Zyklus vorgängig zur Epakte 25 die Epakte 24 auftritt. Es führt auf die Ostergrenze März 48 (anstelle von März 49). Auch in diesem Fall ergibt Satz 7 die richtige Ostergrenze, da dann $d_G = 28$ zu $d^*_G = 27$ führt, weil vorgängig $d_G = 29$ auftritt. Mit $d^*_G = 27$ liefert auch Satz 7 die Ostergrenze März 48. *q.e.d.*

4.3.3 Zum Verhalten von d_G

Wir definieren

$$F := F(p) := M(p) - S(p).$$

Für zwei Jahre j und $j + k$ führen wir die Abkürzungen

$$\Delta d_G = d_G(j + k) - d_G(j), \quad \Delta a = a(j + k) - a(j)$$

sowie

$$\Delta F = F(p_{j+k}) - F(p_j), \quad \Delta M = M(p_{j+k}) - M(p_j), \quad \Delta S = S(p_{j+k}) - S(p_j)$$

ein, wobei $p_j = \text{int}\,\frac{j}{100}$ und $p_{j+k} = \text{int}\,\frac{j+k}{100}$. Aus der Definition von d_G folgt:

Lemma 4.2 $\Delta d_G + \Delta F \equiv 19 \cdot \Delta a \pmod{30}$.

Lemma 4.3 *Sind j und $j + k$ zwei Jahre ein und desselben Metonischen Zyklus ($k > 0$), so gilt:*

(1) $\Delta d_G + \Delta F \equiv 19k \pmod{30}$.

(2) Falls $\Delta d_G \in \{0, 1\}$, so fällt in den beiden Jahren der 1. März nicht auf denselben Wochentag.

(3) Falls $\Delta d_G \in \{0, 1\}$, so fallen Ostern in den beiden Jahren auf verschiedene Daten.

(4) Falls $\Delta d_G = -1$, so können Ostern in den beiden Jahren nur auf dasselbe Datum fallen, wenn $k = 11$, $\Delta S = \Delta M = 0$ und j nicht durch 4 teilbar ist.

Beweis:

(1). Die Behauptung ist ein Spezialfall von Lemma 4.2. Wenn j und $j + k$ im selben Zyklus liegen, gilt $a(j + k) = a(j) + k$ und somit $\Delta a = k$.

Weiter gilt: Da j und $j + k$ im selben Zyklus liegen, gilt: $\Delta F \in \{-1, 0, 1\}$. Für $(\Delta d_G + \Delta F)$ mod 30 bestehen die folgenden Möglichkeiten:

$(\Delta d_G + \Delta F)$ mod 30	$\Delta F = -1$	$\Delta F = 0$	$\Delta F = 1$
$\Delta d_G = -1$	28	29	0
$\Delta d_G = 0$	29	0	1
$\Delta d_G = 1$	0	1	2

(45)

Anderseits nimmt $19k$ mod 30 innerhalb eines Metonischen Zyklus die folgenden Werte an:

$$\begin{array}{r|cccccc|cccccc|cccccc} k & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ \hline 19k \bmod 30 & 19 & 8 & 27 & 16 & 5 & 24 & 13 & 2 & 21 & 10 & 29 & 18 & 7 & 26 & 15 & 4 & 23 & 12 \end{array}. \tag{46}$$

Die Werte 0, 1, und 28 sind nicht möglich.
(2) Gemäss 1. sind deshalb nur zwei Fälle möglich:

I. $k = 11$ und $\Delta F = -1$,

II. $k = 8$ (und $\Delta F = 1$, was wir aber nicht brauchen).

Der Abstand zwischen den Märzanfängen der beiden Jahre beträgt $365k + s$, wenn s die Zahl der dazwischenliegenden Schalttage bezeichnet. Ist t_4 die Anzahl der durch 4 teilbaren Jahreszahlen unter $j + 1$, $j + 2$, ..., $j + k$, so gilt: $s = t_4 - \Delta S$.

Im Fall I gilt $t_4 \in \{2, 3\}$ und $\Delta S = 1$, somit $s \in \{1, 2\}$. Also folgt: $(365k + s) \bmod 7 = (11 + s) \bmod 7 \in \{5, 6\}$, was eine Wochentagsverschiebung von 5 oder 6 Tagen bedeutet. Der Beweis liesse sich nicht führen ohne die Voraussetzung $\Delta S = 1$. Aus $\Delta S = 0$ und $t_4 = 3$ ergäbe sich nämlich $s = 3$ und somit $(k + s) \bmod 7 = (11 + 3) \bmod 7 = 0$, und so fiele der 1. März auf denselben Wochentag.

Im Fall II hat man $t_4 = 2$ und somit $s \in \{1, 2\}$. Für die Wochentagsverschiebung ergibt sich $(365k + s) \bmod 7 = (8 + s) \bmod 7 \in \{2, 3\}$.

(3) Die Annahme desselben Osterdatums führt auf denselben Wochentag für den 1. März.

(4) Gemäss (45) und (46) besteht nur die Möglichkeit $k = 11$ und $\Delta F = 0$. Die Möglichkeit des gleichen Wochentags setzt notwendig $s = 3$ voraus. Dies ist nur möglich, wenn $\Delta S = 0$ (kein Schaltjahrverlust) und somit wegen $\Delta F = 0$ auch $\Delta M = 0$. Wäre j durch 4 teilbar, so wären unter den Zahlen $j + 1$, $j + 2$, ..., $j + 11$ höchstens 2 durch 4 teilbar, also wäre $s < 3$, was den gleichen Wochentag verunmöglichen würde. *q.e.d.*

4.4 Das kirchliche Osterdatum

Auch die beiden Abkürzungen

$$b := b(j) := j \bmod 4, \quad c := c(j) := j \bmod 7 \tag{47}$$

gehen auf C. F. Gauss zurück.

Satz 8 *Das kirchliche Osterdatum fällt auf*

$$\begin{cases} \text{März } 22 + d_J + e_J & \text{im Julianischen Kalender,} \\ \text{März } 22 + d_G^* + e_G^* & \text{im Gregorianischen Kalender,} \end{cases}$$

wobei $e_J := (2b + 4c + 6d_J + 6) \bmod 7$ *und* $e_G^* := (2b + 4c + 6d_G^* + 4 + S) \bmod 7$.

Beweis: (1) Im Fall des Julianischen Kalenders ergibt sich aus Satz 7 mit Lemma 3.1 für $t = 21 + d_J$ als Osterdatum März $22 + d_J + (2b + 4c + 6(21 + d_J) + 6) \bmod 7 =$ März $22 + d_J + (2b + 4c + 6d_J + 6) \bmod 7 =$ März $22 + d_J + e_J$.

(2) Im Fall des Gregorianischen Kalenders ergibt sich analog für $t = 21 + d_G^*$: März $22 + d_G^* + (2b + 4c + 6(21 + d_G^*) + 6 + D) \bmod 7 =$ März $22 + d_G^* + (2b + 4c + 6d_G^* + 6 + D) \bmod 7$. Wegen $D = S - 2$ (vgl. (38)) ist $(2b + 4c + 6d_G^* + 6 + D) \bmod 7 = (2b + 4c + 6d_G^* + 4 + S) \bmod 7 = e_G^*$. *q.e.d.*

Satz 9 *In beiden Kalendern*

(1) fällt Ostern frühestens auf den 22. März, spätestens auf den 25. April,

(2) treten diese Randdaten je höchstens einmal in ein und demselben Metonischen Zyklus auf.

Beweis: (1) Nach Satz 7 ist die frühestmögliche Ostergrenze der 21. März, die spätestmögliche der 18. April ($d_J = 28$, $d_G^* = 28$). Also fällt Ostern frühestens auf den 22. März, spätestens auf den 25. April.

(2) Im *Julianischen Kalender* sind für die beiden Randtermine $d_J = 0$ bzw. $d_J = 28$ notwendig (aber nicht hinreichend). Beide Werte kommen in einem Metonischen Zyklus je genau einmal vor.

Im *Gregorianischen Kalender* ist für den 22. März $d_G = 0$ notwendig. Tritt dieser Wert innerhalb eines Metonischen Zyklus mehr als einmal auf, so kann dies nach Lemma 4.3 nicht zu einer Wiederholung des Osterdatums führen.

Für $d_G < 28$ ist die Ostergrenze spätestens am 17. April, Ostern spätestens am 24. April. Also ist für den 25. April $d_G \in \{28, 29\}$ notwendig. Für das Auftreten von 28 und 29 innerhalb ein und desselben Metonischen Zyklus sind die folgenden Fälle möglich:

I. ... 28 ... 28 ...; II. ... 28 ... 29 ...; III. ... 29 ... 28 ...; IV. ... 29 ... 29 ....

Lemma 4.3 (3) schliesst in allen Fällen ausser III aus, dass zweimal derselbe Ostertermin auftritt. Im Fall III wird infolge der 2. Ausnahmeregel $d_G^* = 27$, was den 25. April ebenfalls ausschliesst. *q.e.d.*

Satz 10 *Die Abfolge der Osterdaten hat die Periode*

(1) 532 Jahre im Julianischen Kalender,

(2) 5 700 000 Jahre im Gregorianischen Kalender.

Beweis: (1) Die 19-jährige Periode von $a = j \bmod 19$ übertrträgt sich auf $d_J = (19a + 15) \bmod 30$. In $e_J = (2b + 4c + 6d_J + 6) \bmod 7$ hat b die Periode 4, c die Periode 7 und d_J die Periode 19. Da 4, 7 und 19 paarweise teilerfremd sind, hat $2b + 4c + 6d_J + 6$ und somit auch e_J die Periode $19 \cdot 4 \cdot 7 = 532$.

(2) Im Gregorianischen Kalender gilt: Im Term $T(j) = 11a + 14 + \text{int}\,\frac{8p+13}{25} + \text{int}\,\frac{p}{4} - p$ von (39) hat $11a$ die Periode 19, nimmt $\text{int}\,\frac{8p+13}{25}$ alle 2500 Jahre um 8 zu und $\text{int}\,\frac{p}{4} - p$ alle 400 Jahre um 3 ab. Das kleinste gemeinsame Vielfache von 2500, 400 und 19 ist 190 000. Es ergibt sich $T(j + 190000) = T(j) + 19\left(\frac{10000}{2500} \cdot 8 - \frac{10000}{400} \cdot 3\right) = T(j) - 817$ oder

$$T(j + 190000) \bmod 30 = (T(j) + 23) \bmod 30.$$

Die Teilerfremdheit von 23 und 30 hat für $E'_G(j)$ die Periode $30 \cdot 190000 = 5700000$ zur Folge. Da 400 aufeinanderfolgende Jahre $146097 = 7 \cdot 20871$ Tage haben, also aus einer ganzen Zahl von Wochen bestehen, gilt dies erst recht für 5 700 000 Jahre. Somit ist dieser Zeitabschnitt periodisch bezüglich der Wochentage und damit der Ostertermine. *q.e.d.*

Beispiel 4.1 *Wann war Ostern gemäss Julianischem Kalender im Jahre 1582?* Man findet für $j = 1582$: $a = 5$, $b = 2$, $c = 0$, $d_J = (95 + 15) \bmod 30 = 20$, $e_J = (4 + 0 + 120 + 6) \bmod 7 = 4$. Die Ostergrenze ist März $21 + 20$, also der 10. April. Ostern fällt auf März $22 + 20 + 4$, auf März 46, somit auf den *15. April*.

Beispiel 4.2 *Wann war Ostern 2008 gemäss Gregorianischem Kalender?* Man findet für $j = 2008$: $a = 13$, $b = 0$, $c = 6$, $d_G^* = d_G = 1$, $e_G^* = 0$. Die Ostergrenze ist März $21 + 1$, also der 22. März. Ostern fällt auf März $22 + 1 + 0$, auf den 23. März.

Beispiel 4.3 *Wann war Ostern 1818 gemäss Gregorianischem Kalender?* Man findet für $j = 1818$: $a = 13$, $b = 2$, $c = 5$, $d_G^* = d_G = 0$, $e_G^* = 0$. Die Ostergrenze ist März $21+0$, der 21. März. Ostern fällt auf März $22 + 0 + 0$, auf den 22. März. Erst im Jahre 2285 wird Ostern wieder auf diesen frühestmöglichen Termin fallen.

Beispiel 4.4 *Wann war Ostern 1981 gemäss Gregorianischem Kalender?* Man findet für $j = 1981$: $a = 5$, $b = 1$, $c = 0$, $d_G = 29$, $d_G^* = 28$, $e_G^* = 0$. Die Ostergrenze ist März $21 + 28$, der 18. April. Ostern fällt auf März $22 + 28 + 0$, auf den 19. April. *Hätten wir für d_G^* den Wert von d_G (also 29 statt 28) verwendet, so hätte sich $e_G^* = 6$ ergeben, wodurch die Ostergrenze auf Sonntag, den 19. April, und Ostern auf den 26. April gefallen wäre.*

Beispiel 4.5 *Unter welchen Bedingungen kann sich der 23. März als Osterdatum innerhalb ein und desselben Metonischen Zyklus wiederholen?* Da als Ostergrenze nur der 21. und der 22. März in Frage kommen, folgt aus Satz 7 $d_G^*(j)$, $d_G^*(j+k) \in \{0, 1\}$ und somit $d_G(j)$, $d_G(j+k) \in \{0, 1\}$. Also gilt: $\Delta_G \in \{-1, 0, 1\}$. Nach Lemma 4.3 ist eine Wiederholung nur im Fall $\Delta d_G = -1$ möglich, und zwar nur, falls $k = 11$, $\Delta S = \Delta M = 0$, und wobei j nicht durch 4 teilbar ist. Der Fall ist seit der Gültigkeit des Gregorianischen Kalenders erst einmal eingetreten, nämlich in den Jahren 1845 und 1856 des 97. Metonischen Zyklus. Er wird erst wieder in den Jahren 4487 und 4498 des 236. Metonischen Zyklus vorkommen. (Ohne die beiden Ausnahmeregeln gälten genau dieselben Überlegungen für den dann zweitspätesten Termin, den 25. April.) Wegen $k = 11$ ist es überdies nicht möglich, dass der 23. März mehr als zweimal vorkommt.

4.5 Die Gregorianischen Ausnahmeregeln

Die Vorverlegung der Ostergrenze, wie sie durch die beiden Ausnahmeregeln im Gregorianischen Kalender erfolgt, hat nur dann eine Wirkung, wenn die Ostergrenze ursprünglich auf einen Sonntag fällt. Man könnte also in den Ausnahmeregeln die Zusatzbedingung ≪falls die Ostergrenze auf einen Sonntag fällt≫ hinzufügen, würde aber damit nur die Berechnung erschweren, ohne das Resultat zu verändern.

Ohne die Ausnahmeregeln wäre der 26. April das spätestmögliche Osterdatum, und dieses könnte sich gemäss Lemma 4.3 innerhalb eines Metonischen Zyklus nicht wiederholen. Offenbar bestand jedoch beim Übergang zum Gregorianischen Kalender das Bedürfnis, den 25. April als spätestmöglichen Ostertermin beizubehalten, weshalb die 1. Ausnahmeregel eingeführt wurde, gemäss welcher $d_G = 29$ auf $d_G^* = 28$ herabgesetzt wird. Nun ist zwar der 26. April ausgeschlossen, aber der 25. April könnte sich innerhalb ein und desselben Metonischen Zyklus wiederholen, im Gegensatz zum frühestmöglichen. Vermutlich hätte dieser Zustand das damalige Symmetriebedürfnis gestört. Die 2. Ausnahmeregel verhindert dies. Sie schiesst allerdings übers Ziel hinaus, indem sie einen sich aus $d_G = 28$ ergebenden 25. April auch dann verhindert, wenn vorgängig $d_G = 29$ nicht auf den 25. April führt.

Für praktische Zwecke genügt auf längere Zeit eine Formulierung der 2. Ausnahmeregel, welche den Rechenaufwand verringert. Tritt nämlich in einem Metonischen Zyklus der 2. Ausnahmefall ein ($d_G = 29$ vor $d_G = 28$), so beträgt der zeitliche Abstand immer 11 Jahre (vgl. den Beweis von Satz 9). In der Formulierung von *Gauss-Bach* lautet die 2. Regel:

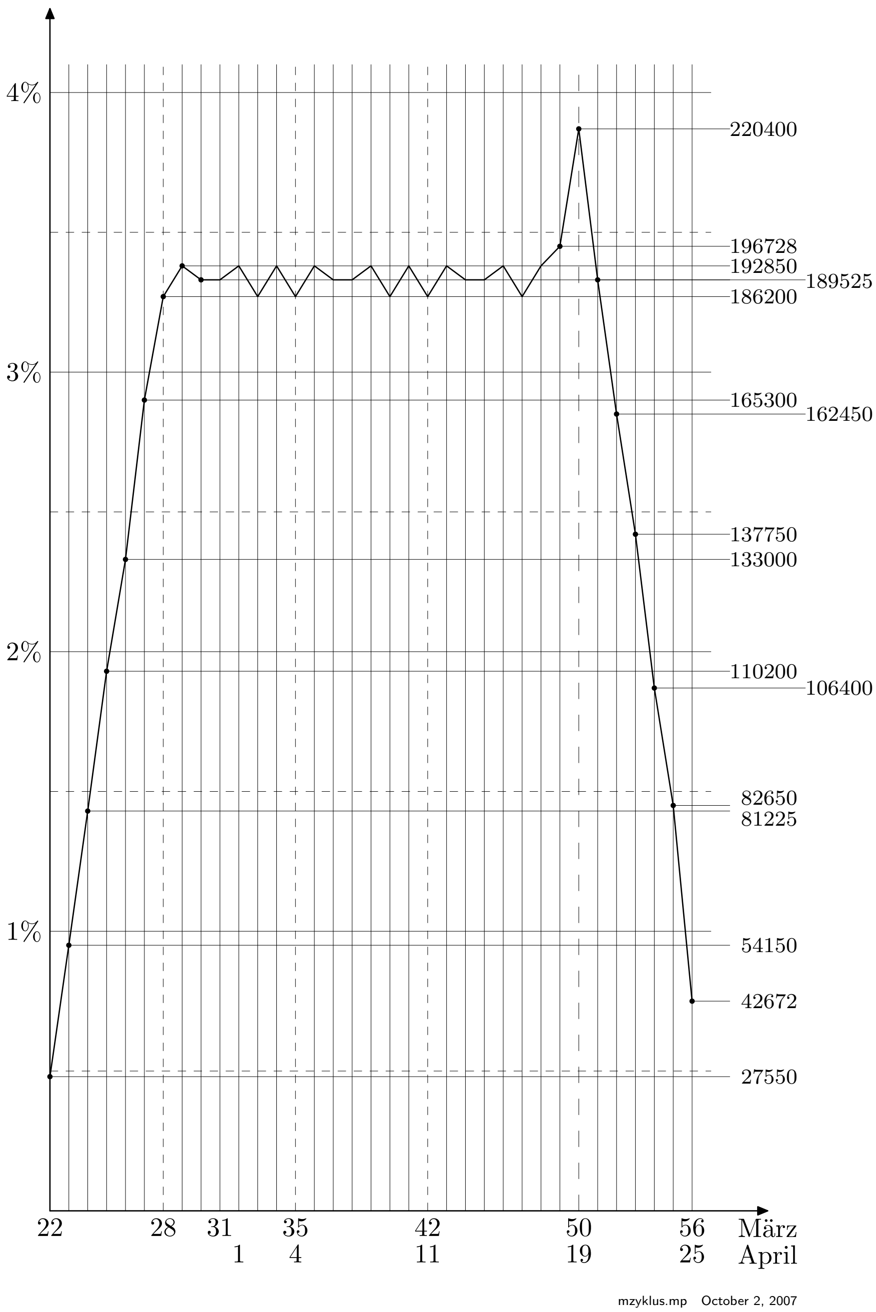
$$\text{Ist } a \geq 11 \text{ und } d_G = 28, \text{ so ersetze man } d_G \text{ durch } d_G^* = 27.$$

Der Übergang von 28 auf 27 findet auch dann statt, wenn 11 Jahre vorher $d_G \neq 29$ ist. Diese Regel setzt also auch Ostertermine um 1 Woche früher an, die nach der kirchlichen 2. Ausnahmeregel nicht verändert werden, d.h. sie versetzt mehr Osterdaten vom 25. April auf den 18. April als die kirchliche Regel. Das erste Jahr, in dem die Regeln verschiedene Osterdaten ergeben, ist das Jahr 8202.

5 Aus dem Elfenbeinturm: Der volle Gregorianische Osterzyklus

Der volle Gregorianische Osterzyklus umfasst nach Satz 10 5 700 000 Jahre. Obwohl nicht anzunehmen ist, dass der heutige Osterfeiertag Hunderttausende oder gar Millionen von Jahren überdauern wird, ist deswegen der Mathematiker wohl kaum davon abzuhalten, das präzis definierte, faszinierende Objekt ≪Gregorianischer Osterzyklus≫ zu untersuchen.

5.1 Häufigkeit der Osterdaten



April	März	Anzahl
	22	27550
	23	54150
	24	81225
	25	110200
	26	133000
	27	165300
	28	186200
	29	192850
	30	189525
	31	189525
1	32	192850
2	33	186200
3	34	192850
4	35	186200
5	36	192850
6	37	189525
7	38	189525
8	39	192850
9	40	186200
10	41	192850
11	42	186200
12	43	192850
13	44	189525
14	45	189525
15	46	192850
16	47	186200
17	48	192850
18	49	196728
19	50	220400
20	51	189525
21	52	162450
22	53	137750
23	54	106400
24	55	82650
25	56	42672
		5700000

Die Berechnungen wurden mit der *kirchlichen Ausnahmeregelung* durchgeführt. Bei Anwendung des schwächeren Gauss-Bachschen Ausnahmekriteriums $a > 10$ würden weitere 672 Ostertermine vom 25. April auf den 18. April vorverlegt.

An den 35 Stellen treten insgesamt 16 verschiedene Häufigkeiten auf. Im Bereich von März 28 bis März

48 hat die Funktion die Periode 7.

5.2 Wiederholte Osterdaten innerhalb eines Metonischen Zyklus

Innerhalb eines Metonischen Zyklus kann dasselbe Osterdatum bis zu viermal vorkommen, wie die folgende Tabelle zeigt:

März	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
April											1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Anzahl	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	3	2	2	2	2	1

Nur die beiden Randdaten, der 22. März und der 25. April, wiederholen sich niemals innerhalb eines Zyklus. (Für den 25. April bestätigt hier die numerische Auswertung, was wir schon bewiesen haben.) Nur ein einziger Termin kann mehr als dreimal auftreten: der 19. April. In genau 600 der insgesamt 300 000 Metonischen Zyklen, die einen vollen Osterzyklus bilden, kommt der 19. April viermal vor. Der erste solche Metonische Zyklus umfasst die Jahre 19760 bis 19778. Seine Osterdaten sind in den folgenden Tabellen aufgeführt.

Jahr	März	April
19760		6.
19761		*19.*
19762		11.
19763		3.
19764		22.
19765		7.
19766	30.	

Jahr	März	April
19767		*19.*
19768		3.
19769	26.	
19770		15.
19771	31.	
19772		*19.*
19773		11.

Jahr	März	April
19774		3.
19775		16.
19776		7.
19777	30.	
19778		*19.*

5.3 Typen der Metonischen Zyklen

Wie der Beweis von Lemma 4.3 zeigt, zerfallen die Metonischen Zyklen bezüglich der Werte 29 und 28 von d_G in die folgenden 8 Typen:

(Typ 1) Weder 29 noch 28 kommen vor.

(Typ 2) 29 kommt genau einmal vor. 28 kommt nicht vor.

(Typ 3) 29 kommt nicht vor. 28 kommt genau einmal vor, wobei $a \leq 10$.

(Typ 4) 29 kommt nicht vor. 28 kommt genau einmal vor, wobei $a > 10$.

(Typ 5) 29 kommt genau zweimal vor, und zwar im Abstand von 11 Jahren.

(Typ 6) 28 kommt 11 Jahre nach 29 vor.

(Typ 7) 29 kommt 8 Jahre nach 28 vor.

(Typ 8) 28 kommt zweimal vor, und zwar im Abstand von 11 Jahren.

Die rechnerische Auswertung zeigt, dass die 300 000 Metonischen Zyklen wie folgt auf die 8 Typen verteilt sind:

	M-Zyklens
Typ 1	4488
Typ 2	105512
Typ 3	104808
Typ 4	704
Typ 5	4488
Typ 6	74808
Typ 7	704
Typ 8	4488
total	300000

Die *kirchlichen* Ostertermine des vollen Osterzyklus sind gemäss der folgenden Tabelle auf die 8 Typen verteilt:

	Typ 1	Typ 2	Typ 3	Typ 4	Typ 5	Typ 6	Typ 7	Typ 8	total
22.3.	1428	10656	15202	128	0	0	0	136	27550
23.3.	1156	15058	25842	128	136	10677	48	1105	54150
24.3.	1547	30088	29733	192	1020	17385	240	1020	81225
25.3.	2533	37392	45390	280	1190	21437	176	1802	110200
26.3.	1666	44658	51178	424	1326	31846	304	1598	133000
27.3.	3689	60897	60343	320	2431	34965	224	2431	165300
28.3.	2737	62150	73973	560	1802	42158	440	2380	186200
29.3.	2346	65416	63329	336	3519	53881	504	3519	192850
30.3.	3094	73953	63854	456	2958	42709	512	1989	189525
31.3.	2737	60047	73553	504	2278	46724	384	3298	189525
1.4.	2703	69230	60302	384	3944	52531	424	3332	192850
2.4.	2448	69131	67206	504	1989	42320	528	2074	186200
3.4.	2839	60407	70213	448	3179	51249	520	3995	192850
4.4.	2091	71986	58915	448	2618	47678	424	2040	186200
5.4.	3876	66146	72879	480	2669	42971	344	3485	192850
6.4.	2244	61491	65460	488	2754	53456	504	3128	189525
7.4.	3179	75406	61109	472	3009	43945	416	1989	189525
8.4.	3808	62162	75711	424	2414	44346	296	3689	192850
9.4.	1870	64987	60356	480	2737	52838	552	2380	186200
10.4.	3978	73361	65808	384	3383	42905	328	2703	192850
11.4.	2244	59464	71398	536	1734	47722	552	2550	186200
12.4.	3060	70694	60216	328	4012	51160	320	3060	192850
13.4.	3281	68410	69120	456	2720	42522	432	2584	189525
14.4.	1955	60277	68237	440	2703	52273	512	3128	189525
15.4.	3247	74667	60234	336	3961	47159	560	2686	192850
16.4.	2703	63644	72610	496	1632	42311	424	2380	186200
17.4.	2550	63613	64748	384	3723	53693	416	3723	192850
18.4.	2448	74584	61818	488	2414	52898	480	1598	196728
19.4.	3400	76028	75570	472	3910	56534	576	3910	220400
20.4.	1989	67149	59833	424	3196	53520	456	2958	189525
21.4.	2346	60243	51477	344	2754	42557	400	2329	162450
22.4.	1819	45489	45559	320	2601	39073	288	2601	137750
23.4.	833	40660	29570	256	1836	31805	352	1088	106400
24.4.	1428	30288	25790	128	1768	21440	176	1632	82650
25.4.	0	14896	14816	128	952	10664	264	952	42672
total	85272	2004728	1991352	13376	85272	1421352	13376	85272	5700000

Die folgenden beiden Tabellen zeigen die Wirkung der 2. Ausnahmeregelung. Die erste zeigt die Verschiebung infolge der *kirchlichen* Regelung, die zweite die zusätzliche Verschiebung beim Übergang von der kirchlichen zur *Gaussschen* Regelung.

	Typ 6	total
18.4.	10528	10528
25.4.	−10528	−10528

	Typ 4	Typ 8	total
18.4.	128	544	672
25.4.	−128	−544	−672

Die Gesamtwirkung der *Gaussschen* Regelung ist aus der folgenden Tabelle ersichtlich:

	Typ 4	Typ 6	Typ 8	total
18.4.	128	10528	544	11200
25.4.	−128	−10528	−544	−11200

5.3.1 Die Wirkung der 1. Ausnahmeregel

Sämtliche provisorischen Ostertermine, die auf den 26. April fallen, werden auf den 19. April vorverlegt. Dies geschieht insgesamt 27 550 mal. Die ersten 15 Jahre sind: 178, 235, 303, 398, 493, 550, 770, 922, 1389, 1446,1514, 1609, 1981, 2076, 2133, die letzten 10: 5696792, 5696944, 5697012, 5697164, 5697536, 5698899, 5699491, 5699559, 5699643, 5699711.

5.4 Die Wirkung der 2. Ausnahmeregel

Sie verschiebt insgesamt 10 528 Ostertermine vom 25. auf den 18. April und verhindert damit nach Satz 9, dass sich der 25. April innerhalb ein und desselben Metonischen Zyklus wiederholt.

Die 2. Ausnahmeregel schiesst jedoch übers Ziel hinaus: Unnötigerweise verlegt sie Ostern auch dann vom 25. auf den 18. April, wenn 11 Jahre früher zwar $d_G = 29$ vorliegt, aber Ostern vor dem 25. April eintritt. Die unnötige Verschiebung findet in genau 2856 der insgesamt 300 000 Zyklen statt.

Drei Klassen. Die 74 808 Zyklen, die von der 2. Ausnahmeregelung betroffen sind ($d_G = 29$ vor $d_G = 28$), zerfallen in folgende drei Klassen:

	$d_G = 29$	$d_G = 28$		Vorverschiebung
Klasse I	19. - 25. April	19. - 24. April	64 280	keine
Klasse II	25. April	25. April	7 672	notwendig
Klasse III	19. bis 24. April	25. April	2 856	unnötig
total			74 808	

Die angegebenen Termine sind die Osterdaten, die sich allein aufgrund der 1. Ausnahmeregelung ergeben.

5.4.1 Klasse I: keine Verschiebung

Die ersten 17 Zyklen fallen in die Zeit vor dem Gregorianischen Kalender. Die nächsten 15 Zyklen haben die Nummern (der Zyklus 0 besteht aus den Jahren 0, 1, ..., 18) 100, 101, 103, 104, 105, 106, 108, 109, 111, 112, 113, 114, 164, 165, 167; sie beginnen in den Jahren 1900, 1919, 1957, 1976, 1995, 2014, 2052, 2071, 2109, 2128, 2147, 2166, 3116, 3135, 3173. Die letzten 10 Zyklen der Klasse I haben die Nummern 299946, 299969, 299970, 299971, 299972, 299979, 299980, 299981, 299982, 299983.

Im 100. Metonischen Zyklus findet man:

Jahr	a	d_G	d_G^*	e_G^*	$22 + d_G^* + e_G^*$	Ostern
1905	5	29	28	4	54	23. April
1916 ohne AR2	16	28	28	4	54	23. April
1916 mitAR2			27	5	54	23. April

Im 101. Zyklus findet man:

Jahr	a	d_G	d_G^*	e_G^*	$22 + d_G^* + e_G^*$	Ostern
1924	5	29	28	1	51	20. April
1935 ohne AR2	16	28	28	2	52	21. April
1935 mitAR2			27	3	52	21. April

Im Gegensatz zum 100. Zyklus sind hier die beiden Osterdaten verschieden.

Im 104. Zyklus findet man:

Jahr	a	d_G	d_G^*	e_G^*	$22 + d_G^* + e_G^*$	Ostern
1981	5	29	28	0	50	19. April
1992 ohne AR2	16	28	28	0	50	19. April
1992 mitAR2			27	1	50	19. April

Hier greift die 1. Ausnahmeregel ein.

5.4.2 Klasse II: notwendige Verschiebung

Die ersten 10 der insgesamt 7672 Zyklen haben die Nummern 71, 102, 107, 166, 171, 174, 202, 210, 372, 380; sie beginnen in den Jahren 1349, 1938, 2033, 3154, 3249, 3306, 3838, 3990, 7068, 7220. Die letzten 10 Zyklen haben die Nummern 299472, 299477, 299508, 299516, 299564, 299572, 299595, 299750, 299801.

Im 102. Zyklus findet man:

Jahr	a	d_G	d^*_G	e^*_G	$22 + d^*_G + e^*_G$	Ostern
1943	5	29	28	6	56	25. April
1954 ohne AR2	16	28	28	6	56	25. April
1954 mitAR2			27	0	49	18. April

5.4.3 Klasse III: überflüssige Verschiebung

Die ersten 15 dieser 2856 Zyklen sind: 7, 74, 110, 205, 336, 344, 375, 614, 665, 673, 951, 974, 982, 1272, 1303. Die letzten 10 Zyklen haben die Nummern 298739, 298770, 298873, 298973, 299076, 299107, 299377, 299428, 299698, 299706, 299737. Die ersten beiden Zyklen mit den Nummern 7 und 74 liegen vor der Gültigkeit des Gregorianischen Kalenders. Sie beginnen mit den Jahren 133 bzw. 1406. Für den mit dem Jahr 2090 beginnenden Zyklus 110 findet man:

Jahr	a	d_G	d^*_G	e^*_G	$22 + d^*_G + e^*_G$	Ostern
2095	5	29	28	5	55	24. April
2106 ohne AR2	16	28	28	6	56	25. April
2106 mitAR2			27	0	49	18. April

Hier berücksichtigt die 2. Ausnahmeregelung nicht, dass der vorangehende Wert $d_G = 29$ auf den 24. April führt.

5.5 Ostern im März

Beim Anblick von Tafeln mit Osterdaten fällt auf, dass niemals zwei aufeinanderfolgende Ostertermine im März zu sehen sind.

Satz 11 *Auf Ostern im März folgt im nächsten Jahr Ostern frühestens am 9. April.*

Beweis: Sind j und $j + 1$ die beiden fraglichen Jahre, so ist im Jahr j das Datum der spätestmöglichen *Ostergrenze* der 30. März, was bedeutet, dass

$$d_G(j) = d^*_G(j) \in \{0,\, 1,\, \ldots,\, 9\}. \tag{48}$$

Für den Fall, dass die beiden Jahre in ein und demselben Metonischen Zyklus liegen, besagt Lemma 4.3 (1): $\Delta d_G + \Delta F \equiv 19 \pmod{30}$. Gemäss Definition von Δd_G folgt $d_G(j+1) \equiv d_G(j) + 19 - \Delta F \pmod{30}$. Die rechte Seite erfüllt gemäss Voraussetzungen die Ungleichung $18 = 0 + 19 - 1 \leq d_G(j) + 19 - \Delta F \leq 9 + 19 + 1 = 29$. Es folgt $d_G(j + 1) \geq 18$. Die frühestmögliche Ostergrenze für das Jahr $j + 1$ ist damit März $21 + 18 =$ April 8. Die Berechnung zeigt, dass innerhalb ein und desselben Metonischen Zyklus der Wechsel des Ostertermins vom März auf den 9. April 1552 mal vorkommt, wobei als Märztermine nur der 27. und der 28. auftreten (1075 mal bzw. 461 mal).

Für den Fall, dass mit dem Jahr $j + 1$ ein neuer Metonischer Zyklus beginnt, hat man $a(j) = 18$, $a(j+1) = 0$ und somit $\Delta a = -18$. Mit Lemma 4.2 folgt: $\Delta d_G + \Delta F \equiv 19 \cdot (-18) \equiv 18 \pmod{30}$. Ebenso wie im ersten Fall schliesst man, mit der Untergrenze 17 statt 18: $d_G(j + 1) \geq 17$. Die frühestmögliche Ostergrenze ist März $21+17 =$ April 7, der frühestmögliche Ostertermin der 8. April. Das ist nur möglich, wenn $\Delta F = 1$, also $\Delta M = 1$ und $\Delta S = 0$. Es folgt:

1. Wegen $\Delta F = 1$ beginnt mit dem Jahr $j + 1$ ein neues Jahrhundert, $p_{j+1} = p_j + 1$.
2. Wegen $\Delta M = 1$ gilt: $p_{j+1} \bmod 25 \in \{2,\, 5,\, 8,\, 11,\, 14,\, 18,\, 21,\, 24\}$.
3. Wegen $\Delta S = 0$ gilt: $p_{j+1} \bmod 4 = 0$.
4. Wegen $a(j + 1) = 0$ folgt: $100p_{j+1} \bmod 19 = 0$ und damit $p_{j+1} \bmod 19 = 0$.

Damit ist p_{j+1} ein Vielfaches von 76: $p_{j+1} = 76k$ mit

$$\begin{cases} k \in \{0,\, 1,\, \ldots,\, 749\} \text{ und} \\ 76k \bmod 25 \in \{2,\, 5,\, 8,\, 11,\, 14,\, 18,\, 21,\, 24\}. \end{cases}$$

Da die zweite Bedingung mit $k \bmod 25 \in \{2, 5, 8, 11, 14, 18, 21, 24\}$ äquivalent ist, bleiben die 240 Möglichkeiten $p_{j+1} = 76(a + 25b)$ mit $a \in \{2, 5, 8, 11, 14, 18, 21, 24\}$ und $b = 0, 1, \ldots, 29$. Die Rechnung zeigt dann, dass in 56 dieser 240 Fälle Ostern im Vorjahr, nämlich im Jahr $100p_{j+1} - 1$, in den Monat März fällt, und zwar ausnahmslos auf den 28. März. Der nachfolgende Ostertermin ist in 16 Fällen der 9. April, in 40 Fällen der 16. April. Der 8. April kommt nicht vor. *q.e.d.*

Die Zahl der Abfolgen vom März auf den 9. April sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

März ⇒ 9. April	ohne Zyklen-wechsel	mit Zyklen-wechsel	total
27. März	1075	0	1075
28. März	461	16	477
total	1536	16	1552

5.6 Aufeinanderfolgende Osterdaten

Allgemeiner stellt sich die Frage, welche Osterdaten auf ein gegebenes Osterdatum folgen können. Auskunft gibt die untenstehende, durch Rechnung erhaltene Tabelle:

	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
22	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
23	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
24	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
26	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
27	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-
28	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-
29	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-
30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
31	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-
01	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-
02	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-
03	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-
04	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-
05	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+
06	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+
07	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-
08	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-
09	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
11	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
12	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
13	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
14	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
15	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
18	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
19	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
21	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
22	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
23	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
24	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Im Muster der Tabelle erkennt man eine offensichtliche notwendige Bedingung aufeinanderfolgender Osterdaten. Ist im ersten Jahr März t das Osterdatum, so fällt März t im zweiten Jahr auf einen Montag oder einen Dienstag, je nachdem dieses ein Gemeinjahr oder ein Schaltjahr ist. Entsprechend fallen im zweiten Jahr die Sonntage auf März $t + 6 + k \cdot 7$ bzw. März $t + 5 + k \cdot 7$.

Die Tabelle zeigt zum Beispiel, dass

- auf Ostern am 23. März (z.Bsp. 2008) als nächstes Osterdatum nur 11. und der 12. April in Frage kommen (im Jahre 2009 ist Ostern am 12. April),
- auf Ostern am 31. März der 12., 13., 19. und der 20. April nächstes Osterdatum werden können,
- auf Ostern am 7. April sechs mögliche Osterdaten (22., 23., 29. und 30. März, 19. und 20. April) folgen können,
- der frühestmögliche Ostertermin 22. März nur eintreten kann, wenn im Vorjahr Ostern am 6. oder 7. April war.

5.7 Wahl des Jahrhunderts bei der Epaktenumwandlung

Wir kehren zurück zur Formel (37):

$$E_G(j) = \left(11g + \operatorname{int}\frac{8p+13}{25} - 5 - \left(q - \operatorname{int}\frac{q}{4} - 2\right)\right) \bmod 30 \tag{49}$$

und gehen nochmals der Frage nach, wie die Jahrhundertvariablen p und q zu wählen sind. Die Berechnung ergibt, dass in den Jahren 1582 bis 9999 die Ergebnisse für die Osterdaten nur in den folgenden 14 Jahren voneinander abweichen:

Jahr	$p = \operatorname{int}\frac{j-1}{100}$, $q = \operatorname{int}\frac{j-1}{100}$	$p = \operatorname{int}\frac{j-1}{100}$, $q = \operatorname{int}\frac{j}{100}$	$p = \operatorname{int}\frac{j}{100}$, $q = \operatorname{int}\frac{j-1}{100}$	$p = \operatorname{int}\frac{j}{100}$, $q = \operatorname{int}\frac{j}{100}$
1700	*04.04.*	11.04.	*04.04.*	11.04.
3300	28.03.	*04.04.*	28.03.	28.03.
3800	*23.03.*	30.03.	*23.03.*	30.03.
4200	*13.04.*	20.04.	*13.04.*	20.04.
4900	25.04.	*28.03.*	25.04.	25.04.
5500	25.03.	25.03.	*22.04.*	25.03.
5800	06.04.	*13.04.*	06.04.	06.04.
6100	28.03.	28.03.	25.04.	28.03.
6500	*11.04.*	18.04.	*11.04.*	18.04.
7400	30.03.	*06.04.*	30.03.	30.03.
8100	*04.04.*	11.04.	*04.04.*	11.04.
8300	22.04.	22.04.	*15.04.*	22.04.
9700	*28.03.*	04.04.	*28.03.*	04.04.
9900	08.04.	*15.04.*	08.04.	08.04.

Der Vergleich mit den Daten der Website des U. S. Naval Observatory USNOEA[3] zeigt, dass die 4. Variante die offiziellen Ostertermine ergibt.

5.8 Kirchliche und wahre Ostern

In den 336 Jahren von 1700 bis 2035 unterscheidet sich der wahre (astronomische) Ostertermin 27mal vom kirchlichen:

Jahr	kirchl.	wahr	kirchl.	wahr	$x_k - x_w$
1700	11.4.	4.4.	620956	620949	7
1724	16.4.	9.4.	629727	629720	7
1744	5.4.	29.3.	637021	637014	7
1761	22.3.	26.4.	643216	643251	−35
1778	19.4.	12.4.	649453	649446	7
1780	26.3.	23.4.	650160	650188	−28
1798	8.4.	1.4.	656747	656740	7
1802	18.4.	25.4.	658217	658224	−7
1810	22.4.	25.3.	661143	661115	28
1818	22.3.	29.3.	664034	664041	−7
1825	3.4.	10.4.	666603	666610	−7
1829	19.4.	26.4.	668080	668087	−7
1845	23.3.	30.3.	673897	673904	−7
1876	16.4.	9.4.	685244	685237	7
1900	15.4.	22.4.	694008	694015	−7
1903	12.4.	19.4.	695100	695107	−7
1905	23.4.	26.3.	695842	695814	28
1923	1.4.	8.4.	702394	702401	−7
1924	20.4.	23.3.	702779	702751	28
1927	17.4.	24.4.	703871	703878	−7
1943	25.4.	28.3.	709723	709695	28
1954	18.4.	25.4.	713734	713741	−7
1962	22.4.	25.3.	716660	716632	28
1967	26.3.	2.4.	718459	718466	−7
1974	14.4.	7.4.	721035	721028	7
1981	19.4.	26.4.	723597	723604	−7
2019	21.4.	24.3.	737478	737450	28

(50)

Die grösste Verschiebung findet man im Jahre 1761. Der kirchliche Termin ist der frühestmögliche; er liegt 5 Wochen vor dem wahren (astronomischen). Die Einzelheiten sind wie folgt:

	kirchlich			wahr		
Ostergrenze	21.03.1761	643215	Sa	19.04.1761	643244	So
Ostern	22.03.1761	643216	So	26.04.1761	643251	So

Der Unterschied zwischen den beiden Vollmonden nach dem 3. Neumond beträgt zwar nur einen einzigen Tag, doch liegt dazwischen die kritische Grenze: Der kirchliche Vollmond (21. März) nach dem 3. Neumond ist gerade noch mögliche Ostergrenze; der wahre, astronomische (20. März) kommt einen Tag zu früh. Dadurch verschiebt sich die Ostergrenze um 29 Tage. Da die kirchliche auf einen Samstag, die wahre auf einen Sonntag fällt, vergrössert sich die Differenz um weitere $7 - 1 = 6$ Tage auf 35 Tage.

6 Wahrer, ausgeglichener und kirchlicher Mond

6.1 Synodischer Monat und wahrer Mond

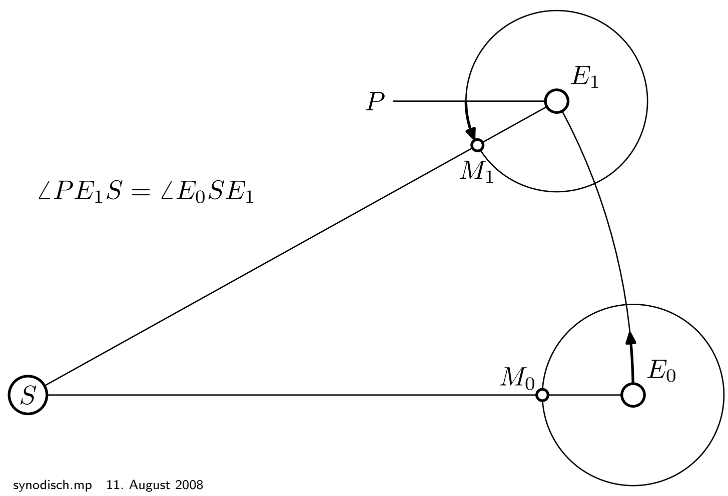
Unter dem *synodischen Monat* versteht man den Zeitabschnitt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Neumonden. Die mittlere Länge des synodischen Monats beträgt

$$L = 29.530589 \text{ Tage.} \tag{51}$$

Man berechnet diese Zahl aus dem *siderischen* Jahr J_s und dem *siderischen* Monat M_s, welche die Umlaufszeiten der Erde um die Sonne und des Mondes um die Erde in bezug auf die Sterne bedeuten:

$$J_s = 365.256361\text{Tage}, \quad M_s = 27.321662\text{Tage}.$$

Während eines *synodischen* Monats vollführt die Erde $\frac{L}{J_s}$ eines Umlaufs um die Sonne, der Mond $\frac{L}{M_s}$ eines Umlaufs um die Erde. Aus der folgenden Zeichnung geht hervor, dass dabei der Mond exakt einen Umlauf mehr vollführt:



Es gilt somit

$$\frac{L}{M_s} = 1 + \frac{L}{J_s}.$$

Daraus ergibt sich der mittlere synodische Monat zu

$$L = \frac{M_s}{1 - M_s/J_s} = 29.530589. \tag{52}$$

Der reale Mond bewegt sich allerdings unregelmässig, wie die folgende Tabelle klarmacht. Diese zeigt die wahren Neumondtermine im Jahre 1700:

	d	h	m	x	L'	$L' - L$
1700 Jan	20	4	20	620875.181		
1700 Feb	18	23	33	620904.981	29.801	0.270
1700 Mär	20	16	46	620934.699	29.717	0.187
1700 Apr	19	6	51	620964.285	29.587	0.056
1700 Mai	18	17	45	620993.740	29.454	-0.076
1700 Jun	17	2	16	621023.094	29.355	-0.176
1700 Jul	16	9	34	621052.399	29.304	-0.226
1700 Aug	14	16	47	621081.699	29.301	-0.230
1700 Sep	13	0	47	621111.033	29.333	-0.197
1700 Okt	12	10	15	621140.427	29.394	-0.136
1700 Nov	10	21	44	621169.906	29.478	-0.052
1700 Dez	10	11	44	621199.489	29.583	0.053

Der Tagesnummer x wird hier zu einer kontinuierlichen Grösse erweitert. Ganzzahlige Tagesindizes bezeichnen den Tagesanfang. Der 1. Zeile der Tabelle entnimmt man z.B., dass $(20, 1, 1700)_G = 620875$, und dabei bezeichnet $x = 620875$ den Beginn des Gregorianischen 20. Januar 1700.

Die zweitletzte Spalte enthält die seit dem letzten Neumond vergangene Zeit L'. Die letzte Spalte enthält die Differenz von L' zum synodischen Monat. Der kürzeste Abstand zwischen zwei Neumonden beträgt in diesem Jahr 29.301 Tage, der längste 29.801 Tage.

Die Angaben wurden der vom U. S. Naval Observatory geführten Website USNOMP[2] entnommen, auf welcher gegenwärtig (2007) die wahren Monddaten aller Jahre von 1700 bis 2035 aufgeführt sind. In die 336 Jahre fallen 4156 Neumonde. Der erste war am 20. Januar 1700, 4 Uhr 20, der letzte wird am 29. Dezember 2035 stattfinden, um 14 Uhr 31. Als Tagesindizes ergeben sich $x_1 = (20+\frac{4}{24}+\frac{20}{24\cdot 60}, 20, 1700)_G = 620875.181$ und $x_2 = (29 + \frac{14}{24} + \frac{31}{24\cdot 60}, 12, 2035)_G = 743574.605$. Die mittlere Dauer eines synodischen Monats beträgt danach

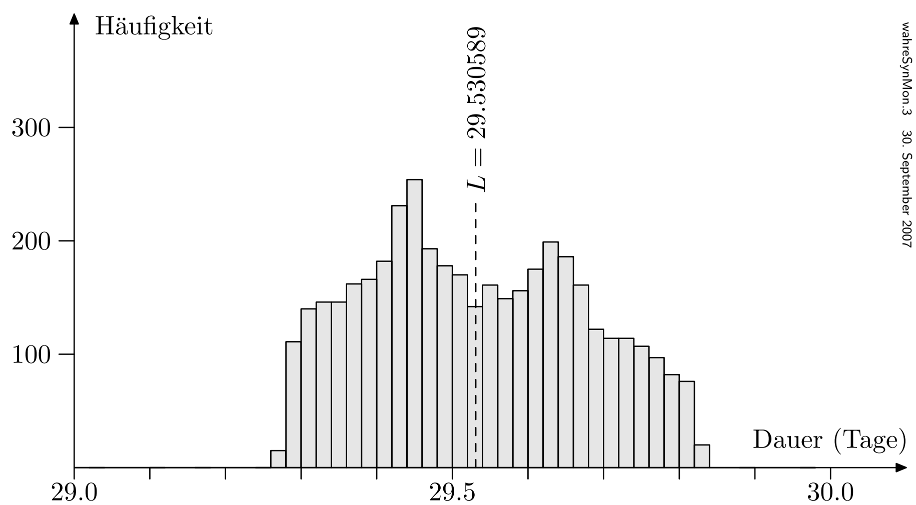
$$(x_2 - x_1) : 4155 = 29.530547.$$

Dieser Wert ist um 0.00014 % kleiner als der aus dem siderischen Jahr und dem siderischen Monat errechnete Wert (52). Von den 4155 synodischen Monaten dauert der kürzeste 29.272, der längste 29.832 Tage:

Synodischer Mona	von		bis		Dauer (Tage)
Kürzester	18. Juni 1708	10 Uhr 07	17. Juli 1700	16 Uhr 38	29.272
Längster	9. Dezember 1788	16 Uhr 05	8. Januar 1788	12 Uhr 03	29.832

Die folgende Abbildung zeigt die Dauer des wahren synodischen Monats bei einer Klasseneinteilung von der Breite 0.02 Tage.

Dauer der 4155 wahren synodischen Monate 1700 – 2035



6.2 Der ausgeglichene Mond

Der *ausgeglichene Mond* unterscheidet sich vom wahren dadurch, dass von Neumond zu Neumond immer exakt dieselbe Zeit L gemäss (51) verstreicht. Die ausgeglichenen Neumondtermine haben also die Form $x_0 + kL$, mit der Zusatzbedingung, dass sie die wahren Neumondtermine $x_1, x_2, \ldots, x_{4156}$ der Jahre 1700 bis 2035 möglichst gut annähern. «Möglichst gut» bedeutet, dass die Summe der Abweichungsquadrate,

$$S(x_0) = \sum_{k=1}^{4156} (x_k - (x_0 - kL))^2 ,$$

minimal wird. Der Graph von $S(x_0)$ ist eine nach oben geöffnete quadratische Parabel. S erreicht das Minimum dort, wo $S'(x_0) = 0$. Daraus ergibt sich $\sum_{k=1}^{4156} (x_k - (x_0 + kL)) = 0$ als Bedingung für x_0, woraus mit $\sum_{k=1}^{4156} x_k = 2835326731.24$

$$x_0 = \frac{1}{4156} \sum_{k=1}^{4156} x_k - \frac{4157}{2} L = 620845.582, \quad x_0 \bmod L = 24.009$$

folgt. Zu einem beliebigen Zeitpunkt x sind also seit dem letzten Neumond des ausgeglichenen Mondes

$$(x - 24.009) \bmod L = (x + L - 24.009) \bmod L = (x + 5.521) \bmod L$$

Tage vergangen. Diese Zeit nennt man das *Mondalter* (des ausgeglichenen Mondes) zum Zeitpunkt x:

$$A(x) = (x + 5.521) \bmod L. \tag{53}$$

Die folgenden beiden Tabellen zeigen in der letzten Spalte das Mondalter des *ausgeglichenen* Mondes an den *wahren* Neumondterminen der Jahre 1700 bzw. 2035. Sie spiegeln die Schwankungen des wahren Mondes in den Jahren 1700 und 2035.

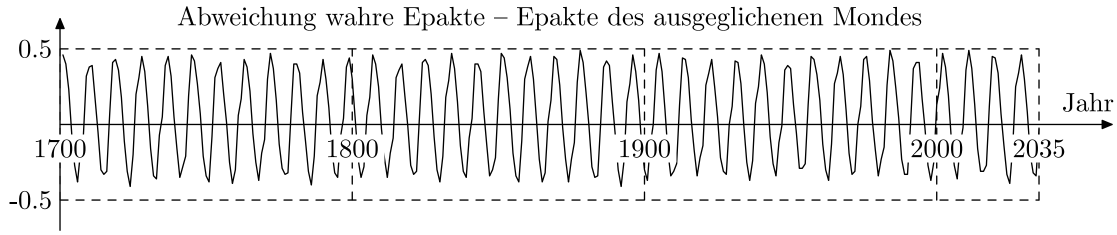
	d	h	m	A
1700 Jan	20	4	20	0.07
1700 Feb	18	23	33	0.34
1700 Mär	20	16	46	0.53
1700 Apr	19	6	51	0.58
1700 Mai	18	17	45	0.50
1700 Jun	17	2	16	0.33
1700 Jul	16	9	34	0.10
1700 Aug	14	16	47	-0.13
1700 Sep	13	0	47	-0.32
1700 Okt	12	10	15	-0.46
1700 Nov	10	21	44	-0.51
1700 Dez	10	11	44	-0.46

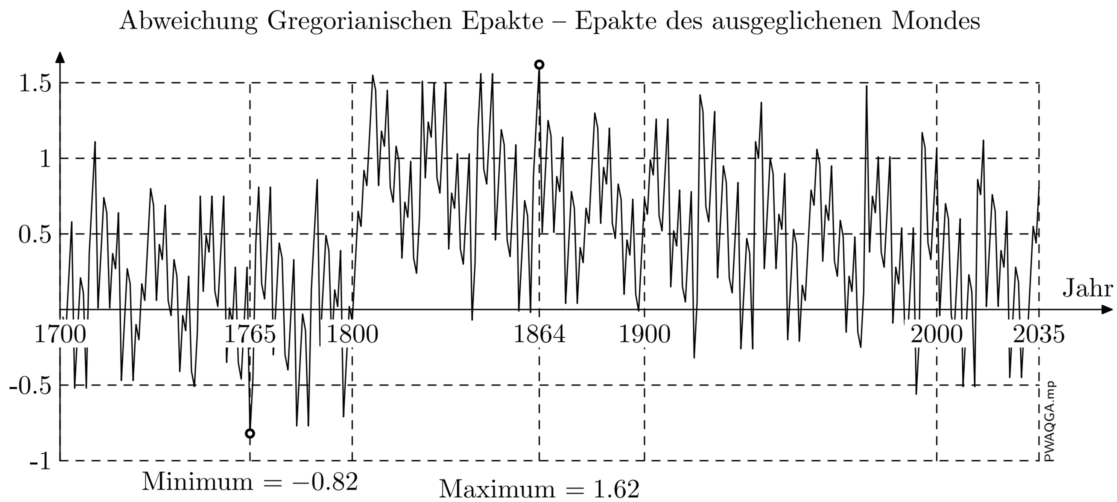
	d	h	m	A
2035 Jan	9	15	3	0.28
2035 Feb	8	8	22	0.48
2035 Mär	9	23	9	0.56
2035 Apr	8	10	58	0.52
2035 Mai	7	20	4	0.37
2035 Jun	6	3	20	0.14
2035 Jul	5	9	59	-0.11
2035 Aug	3	17	12	-0.34
2035 Sep	2	1	59	-0.50
2035 Okt	1	13	7	-0.57
2035 Okt	31	2	58	-0.52
2035 Nov	29	19	37	-0.36
2035 Dez	29	14	31	-0.10

Zum Beispiel hat der ausgeglichene Mond des Jahres 1700 zur Zeit des wahren Aprilneumondes das Alter 0.58 Tage, was bedeutet, dass der wahre Mond 0.58 Tage hinter dem ausgeglichenen nachhinkt. Im November jedoch eilt der wahre Mond dem ausgeglichenen um 0.51 Tage voraus.

6.3 Vergleich der Epakten

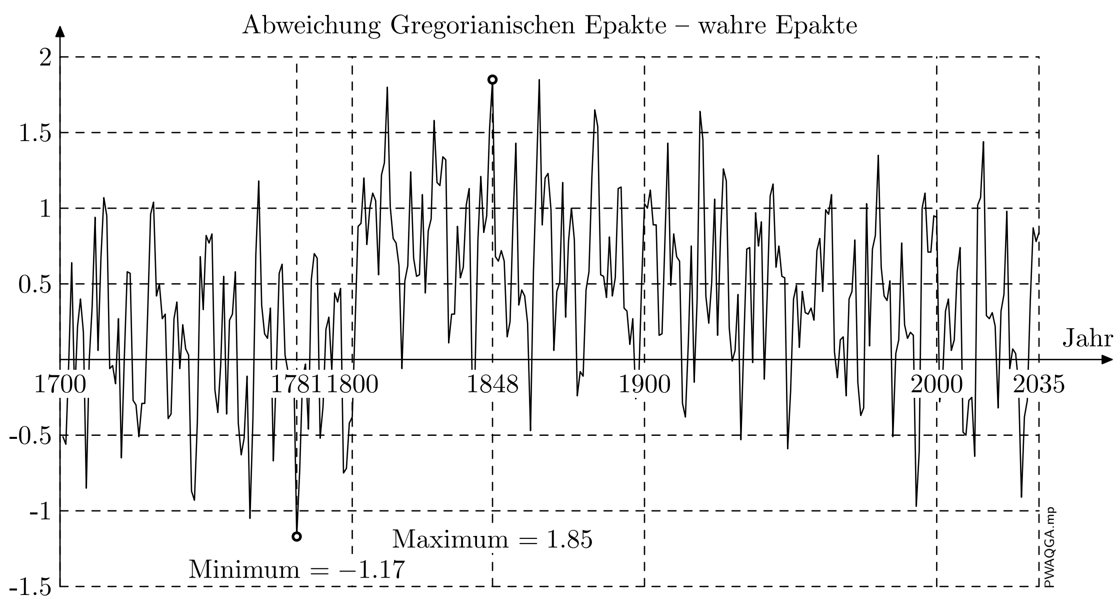
Wir stellen die Abweichungen der wahren und der Gregorianischen Epakte von der Epakte des ausgeglichenen Mondes einander gegenüber:





Die Abweichung der Gregorianischen Epakte von derjenigen des ausgeglichenen Mondes erreichte im Jahre 1765 ein Minimum mit $\Delta E_G = -0.82$, im Jahre 1864 ein Maximum mit $\Delta E_G = 1.62$.

Die folgende Abweichung stellt die Gregorianische Epakte der wahren gegenüber:



Die Abweichung der Gregorianischen von der wahren Epakte erreichte im Jahre 1781 ein Minimum mit $\Delta E = -1.17$, im Jahre 1848 ein Maximum mit $\Delta E = 1.85$.

7 Lösungen zu den Übungen

7.1 Übung 3.1

Beginnt man wie üblich die Tage mit dem Julianischen 1. März des Jahres 0 zu zählen, so liegen vor dem Julianischen Jahr j

$$n_J = 365(j-1) + \text{int}\,\frac{j-1}{4}$$

Tage, vor dem Gregorianischen Jahr $j+1$

$$n_G = 2 + 365j + \text{int}\,\frac{j}{4} - \text{int}\,\frac{j}{100} + \text{int}\,\frac{j}{400}.$$

Aus $n_J = n_G$ folgt

$$\text{int}\,\frac{j}{100} - \text{int}\,\frac{j}{400} = 367 + \text{int}\,\frac{j}{4} - \text{int}\,\frac{j-1}{4}.$$

Mit $p := \text{int}\,\frac{j}{100}$ ist diese Bedingung wegen (3) äquivalent mit

$$p - \text{int}\,\frac{p}{4} = 367 + \text{int}\,\frac{j}{4} - \text{int}\,\frac{j-1}{4}. \tag{54}$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

I. $j \bmod 4 \neq 0$. Dann gilt: $\text{int}\,\frac{j}{4} - \text{int}\,\frac{j-1}{4} = 0$, und (54) reduziert sich auf

$$p - \text{int}\,\frac{p}{4} = 367.$$

Die einzige Lösung ist $p = 489$, und somit ergeben sich diejenigen 75 der Jahre $48900, 48901, \ldots, 48999$, welche nicht durch 4 teilbar sind:

$$j = 48901,\ 48902,\ 48903;\ 48905,\ 48906,\ 48907;\ ...,\ \ 48997,\ 48998,\ 48999.$$

Tagesnummer	WT	Julianisch	Gregorianisch
17860666	Fr	01.01.48900	31.12.48900
17861032	So	01.01.48901	01.01.48902
17861397	Mo	01.01.48902	01.01.48903
17861762	Di	01.01.48903	01.01.48904
17862127	Mi	01.01.48904	31.12.48904
17862493	Fr	01.01.48905	01.01.48906
17862858	Sa	01.01.48906	01.01.48907
17863223	So	01.01.48907	01.01.48908
...	...	...	...
17894635	Mi	01.01.48993	01.01.48994
17895000	Do	01.01.48994	01.01.48995
17895365	Fr	01.01.48995	01.01.48996
17895730	Sa	01.01.48996	31.12.48996
17896096	Mo	01.01.48997	01.01.48998
17896461	Di	01.01.48998	01.01.48999
17896826	Mi	01.01.48999	01.01.49000

II. $j \bmod 4 = 0$. Dann gilt: $\text{int}\,\frac{j}{4} - \text{int}\,\frac{j-1}{4} = 1$, und (54) reduziert sich auf

$$p - \text{int}\,\frac{p}{4} = 368.$$

Diese Gleichung hat die Lösung $p = 490$, und es ergeben sich diejenigen 25 der Jahre $49000, 49001, \ldots, 49099$, welche durch 4 teilbar sind:

$$j = 49000,\ 49004,\ 49008,\ ...,\ \ldots,\ 49096.$$

Tagesnummer	WT	Julianisch	Gregorianisch
17897191	Do	01.01.49000	01.01.49001
17897557	Sa	01.01.49001	02.01.49002
17897922	So	01.01.49002	02.01.49003
17898287	Mo	01.01.49003	02.01.49004
17898652	Di	01.01.49004	01.01.49005
17899018	Do	01.01.49005	02.01.49006
17899383	Fr	01.01.49006	02.01.49007
17899748	Sa	01.01.49007	02.01.49008
...	...	...	...
17932255	Fr	01.01.49096	01.01.49097
17932621	So	01.01.49097	02.01.49098
17932986	Mo	01.01.49098	02.01.49099
17933351	Di	01.01.49099	02.01.49100
17933716	Mi	01.01.49100	02.01.49101
17934082	Fr	01.01.49101	03.01.49102

7.2 Übung 3.2

Anstelle der Gleichung (54) tritt die Gleichung

$$p - \operatorname{int}\frac{p}{4} = 732 + \operatorname{int}\frac{j+1}{4} - \operatorname{int}\frac{j-1}{4}, \text{ mit } p := \operatorname{int}\frac{j+1}{100}. \tag{55}$$

Wir unterscheiden die Fälle

I $j \bmod 4 \in \{1,2\}$. Die Gleichung (55) reduziert sich auf

$$p - \operatorname{int}\frac{p}{4} = 732$$

mit den Lösungen $p = 975$, 976. Dies führt auf die 100 Julianischen Jahre $97499 \leq j \leq 97698$ mit $j \bmod 4 \in \{1,2\}$:

$$j = 97501,\ 97502;\ 97505,\ 97506;\ \ldots,\ 97797,\ 97798.$$

Tagesnummer	WT	Julianisch	Gregorianisch
35611816	Di	01.01.97500	31.12.97501
35612182	Do	01.01.97501	01.01.97503
35612547	Fr	01.01.97502	01.01.97504
35612912	Sa	01.01.97503	31.12.97504
35613277	So	01.01.97504	31.12.97505
...	...	...	...
35683771	Do	01.01.97697	01.01.97699
35684136	Fr	01.01.97698	01.01.97700

II $j \bmod 4 \in \{3,0\}$ Die Gleichung (55) reduziert sich auf

$$p - \operatorname{int}\frac{p}{4} = 733$$

mit der Lösung $p = 977$. Dies führt auf die 50 Julianischen Jahre $97699 \leq j \leq 97798$ mit $j \bmod 4 \in \{3,0\}$:

$$j = 97699,\ 97700;\ 97703,\ 97704;\ \ldots;\ 97795,\ 97796.$$

Tagesnummer	WT	Julianisch	Gregorianisch
35684501	Sa	01.01.97699	01.01.97701
35684866	So	01.01.97700	01.01.97702
35685232	Di	01.01.97701	02.01.97703
35685597	Mi	01.01.97702	02.01.97704
...	...	...	...
35719565	So	01.01.97795	01.01.97797
35719930	Mo	01.01.97796	01.01.97798
35720296	Mi	01.01.97797	02.01.97799

Literatur

[1] Heinz Bachmann. *Kalenderarithmetik*, vergriffen. Juris Druck + Verlag AG, Zürich, 1984 und 1986, ISBN 3 260 05035 3

[2] U. S. Naval Observatory, `aa.usno.navy.mil/data/docs/MoonPhase.php`

[3] U. S. Naval Observatory, Website `aa.usno.navy.mil/data/docs/easter.php`

osurs@dell98:/home/osurs/KALENDERARITHMETIK/KALENDERRECHNUNG/KALENDERRECHNUNG.tex 20. August 2008

Index